

2023.9.4 Week 1

1. 设 m, n 为正整数, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

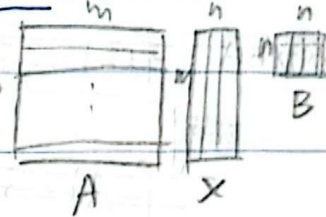
证明: $\text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A) \text{vec}(X)$ 极有用公式

法一: 暴力展开

用分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix}$

$X = (X_1 \dots X_n)$

$B = (B_1 \dots B_n)^T$



$$AXB = \begin{pmatrix} A_1^T X_1 & \dots & A_1^T X_n \\ \vdots & & \vdots \\ A_m^T X_1 & \dots & A_m^T X_n \end{pmatrix} (B_1 \dots B_n)^T = \begin{pmatrix} \sum_i A_1^T X_i B_{i1} & \dots & \sum_i A_1^T X_i B_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_i A_m^T X_i B_{i1} & \dots & \sum_i A_m^T X_i B_{in} \end{pmatrix}$$

$$B^T \otimes A = \begin{pmatrix} b_{11} A & \dots & b_{n1} A \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} A & \dots & b_{nn} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} A_1^T & \dots & b_{n1} A_1^T \\ b_{11} A_m^T & \dots & b_{n1} A_m^T \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} A_1^T & \dots & b_{nn} A_1^T \\ b_{1n} A_m^T & \dots & b_{nn} A_m^T \end{pmatrix}$$

$$(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \begin{pmatrix} b_{11} A_1^T & \dots & b_{n1} A_1^T \\ b_{11} A_m^T & \dots & b_{n1} A_m^T \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} A_1^T & \dots & b_{nn} A_1^T \\ b_{1n} A_m^T & \dots & b_{nn} A_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} A_1^T X_1 + \dots + b_{n1} A_1^T X_n \\ \vdots \\ b_{1n} A_m^T X_1 + \dots + b_{nn} A_m^T X_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_i A_1^T X_i b_{i1} \\ \vdots \\ \sum_i A_m^T X_i b_{in} \end{pmatrix}$$

$\therefore \text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A) \text{vec}(X)$

法二: 更具有美感的证明过程(见左) 哈哈!

引理1: $\text{Vec}(ab^T) = b \otimes a$

内积与 Kronecker 积的关系

显然 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$

引理2: $\text{Vec}(Axy^TB) = (B^T \otimes A) \text{Vec}(xy^T)$ rank=1 的乘积,

证明: 左 = $\text{Vec}(A(B^Ty)^T) = (B^Ty) \otimes (Ax)$

$= (B^T \otimes A)(y \otimes x) = \text{Vec}(xy^T) = \text{右}$

∴ 将 X 分解为 $X = \sum_i x_i e_i^T$ 基坐标之和. 把 rank 为 n 的乘积, 分解为 n 个 rank 为 1 的乘积,

$\text{Vec}(AXB) = \text{Vec}(A \sum x_i e_i^T B) = \text{Vec}(\sum A x_i e_i^T B)$

$= \sum \text{Vec}(A x_i e_i^T B) = \sum (B^T \otimes A) \text{Vec}(x_i e_i^T)$

$= (B^T \otimes A) \sum \text{Vec}(x_i e_i^T) = (B^T \otimes A) \text{Vec}(\sum x_i e_i^T)$

$= (B^T \otimes A) \text{Vec}(X)$

∴ 等式成立.

2. 设 m, n 为给定的正整数,

证明: $\forall A, B \in C^{n \times n}$, 有 $A^m + B^m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (A + \omega^k B)^m$, 其中 $\omega = \exp(2\pi i/m)$

~~Cauchy 积分公式~~ $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$ $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

~~知特~~ $f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda I - A} d\lambda$

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{m-1} = \frac{\omega^m - 1}{\omega - 1} = \frac{e^{2\pi i} - 1}{\omega - 1} = 0$$

$$1 + \omega^2 + \dots + \omega^{2(m-1)} = \frac{\omega^{2m} - 1}{\omega^2 - 1} = \frac{e^{4\pi i} - 1}{\omega^2 - 1} = 0$$

$$1 + \omega^{m-1} + \dots + \omega^{(m-1)^2} = \frac{\omega^{m(m-1)} - 1}{\omega^{m-1} - 1} = \frac{e^{2\pi i(m-1)} - 1}{\omega^{m-1} - 1} = 0$$

$$1 + \omega^m + \omega^{2m} + \dots + \omega^{m(m-1)} = \frac{\omega^{m^2} - 1}{\omega^m - 1} = \frac{e^{2\pi i} - 1}{\omega^m - 1} = m$$

$$\therefore \text{右式} = \frac{1}{m} (mA^m + 0 + mB^m) = A^m + B^m = \text{左式}$$

总结: 1. $e^{\pi i} = -1$ $e^{2\pi i} = 1$ 要敏感

2. 等比数列暴力展开 $A^m + C_m^1 A^{m-1} \cdot \omega^k B + \dots + \omega^{k^2} + \dots + \omega^{mk}$

3. 二项式定理

不能随便展! $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$$\neq A^2 + 2AB + B^2$$

原因在于 A, B 乘法不可交换

3. 计算复积分

$$\int_{|\lambda|=4} \frac{d\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 2}$$

$$\int_{|\lambda|=4} \frac{d\lambda}{\lambda-2} - \int_{|\lambda|=4} \frac{d\lambda}{\lambda-1}$$

$$= 2\pi i (f(2) - f(1))$$

Cauchy 积分公式: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda \Leftrightarrow \int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = 0$ Cauchy-Goursat 定理

$$\text{原式} = \int_{|\lambda|=4} \frac{d\lambda}{\lambda-2} - \int_{|\lambda|=4} \frac{d\lambda}{\lambda-1}$$

在 $\lambda=2$ 和 $\lambda=1$ 处不连续, 要绕开这两个点
为解析函数: $\therefore$ 除 $3\lambda-2$ 和 $\lambda=1$

处都连续. Cauchy 积分公式满足

$$\text{令 } \lambda = 2 + pe^{i\theta}$$

$$\lambda = 1 + pe^{i\theta}$$

Cauchy-Goursat 定理, 可变成 2 的循环常数和 1 的循环常数

$$= \int_0^{2\pi} \frac{pe^{i\theta} \cdot i d\theta}{pe^{i\theta}} - \int_0^{2\pi} \frac{pe^{i\theta} \cdot i d\theta}{pe^{i\theta}} = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

→ $AB \neq BA$ *

WB 出现一次, 在 $m-1$ 个 A 中的任一位置

↓

(WB) 出现 m 次

$$(A + WB)^m \text{ 展开共 } 2^m \text{ 项} = A^m + W^k(-\text{堆}) + W^{2k}(-\text{堆}) + \dots + W^{(m-k)k} B^m$$

W 每一个项, 在 $k=0:m-1$ 处加和.

$$1 + \dots + W^{m-1} = 0$$

$$1 + W^{m-1} + \dots = 0$$

$$1 + W^m + \dots = m.$$

$$\therefore \text{右式} = \frac{1}{m} (mA^m + 0 \times (2^m - 2) + mB^m) = A^m + B^m = \text{左式}.$$

思路正确, 具体展开时没想明白, 加上 $AB \neq BA$ 的大错.

4. 证明: 复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_1 z_3 = 0 \quad \text{ps: } z_1 - z_2 + z_2 - z_3 + z_3 - z_1 = 0$$

等价于证明: 复数 x, y, z

在 $x+y+z=0$ 条件下,

$$|x| = |y| = |z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \quad \text{条件}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{cases} \quad \text{条件}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \therefore |x| = |y| = |z|$$

$$\therefore \text{设 } x = p e^{i\theta_1}, y = p e^{i\theta_2}, z = p e^{i\theta_3}$$

$$\therefore x + y + z = 0$$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0 \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_3) = \cos(\theta_3 - \theta_1) = -\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta_1, \theta_2, \theta_3$ 两两之间夹角为 120°

$$\therefore \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_3 = \cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_1 + \frac{4}{3}\pi) + \cos(2\theta_1 - \frac{4}{3}\pi) = 0$$

$$\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_3 = \sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_1 + \frac{4}{3}\pi) + \sin(2\theta_1 - \frac{4}{3}\pi) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = p^2 e^{i2\theta_1} + p^2 e^{i2\theta_2} + p^2 e^{i2\theta_3} = 0, \Rightarrow \text{成立}$$

$$\textcircled{2} \Leftarrow \text{令 } x = a_1 + b_1 i, y = a_2 + b_2 i, z = a_3 + b_3 i$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{cases}$$

由轮换对称性, $a+b+c=0$ 不妨设 $x = p e^{i\theta_1}, \theta_1 = 0$, 即 $b_1 = 0$.

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 = b_2^2 \\ b_2(a_1 + 2a_2) = 0 \end{cases} \quad \text{若 } b_2 = 0, \text{ 则 } b_3 = 0, a_1 = a_2 = a_3 = 0, x = y = z = 0$$

$|x| = |y| = |z| = 0$ 满足

2° 若 $a_1 = -2a_2$, 则 $3a_1 = b_1$

$$\begin{cases} a_1 = -2a_2 \\ a_3 = a_2 \end{cases} \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = -b_2 \end{cases}$$

$$1x \Rightarrow a_1 + b_1 = 4a_1$$

$$1z \Rightarrow a_3 + b_3 = 4a_3$$

$$1y \Rightarrow a_2 + b_2 = 4a_2$$

$$1x = 1y = 1z \Rightarrow$$

以上方程

linearly independent

linearly independent

Q.

Q.

5. 设 n 为正整数, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是给定的对称矩阵. 定义 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数

$$f(x) = \text{tr}((A + XX^T)^2). \text{ 求 } \frac{\partial f}{\partial X}$$

$$\text{tr}[(A + XX^T)(A + XX^T)]$$

$$= \text{tr}(A \cdot A) + \text{tr}(X(AX)^T) + \text{tr}(AX)X + \text{tr}(XX^TXX^T).$$

↓
求导后为0, 不考虑.

↖
= 者相者.

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 2 \frac{\partial \text{tr}[(AX)X^T]}{\partial X} + \frac{\partial \text{tr}(XX^TXX^T)}{\partial X}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} A_1X \\ A_2X \\ \vdots \\ A_nX \end{pmatrix}$$

$$(AX)X^T = \begin{bmatrix} A_1Xx_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_nXx_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{\partial \text{tr}[(AX)X^T]}{\partial X} = \begin{bmatrix} A_1X + 0 \cdot 1 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot 1 \cdot x_n \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A_1X \\ 2A_2X \\ \vdots \\ 2A_nX \end{bmatrix} = 2AX$$

$$XX^TXX^T = (X^TX)X \cdot X^T = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \begin{pmatrix} x_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{tr}(XX^TXX^T) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^2.$$

$$\therefore \frac{\partial \text{tr}(XX^TXX^T)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 2(x_1^2 + \dots + x_n^2) \cdot 2x_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 4|X|^2 X$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial X} = (4A + 4|X|^2)X$$

ps: 若 f 为一个标量, 可拆常数项来, 如 $X^TAX \Rightarrow AX + A^TX$

若 f 为 tr , 则需分块把矩阵算出来.

6. n 为正整数, 给定 $D_n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(X) > 0\}$.

在 D_n 上定义 $f(X) = \ln \det(X)$. 求 $f(X)$ 在正定矩阵 $X_0 \in D_n$ 处梯度 $\nabla f(X_0)$.

$$\nabla f(X_0) = \left. \frac{\partial f(X)}{\partial X} \right|_{X=X_0} = \frac{1}{\det(X_0)} \begin{pmatrix} X_{0,1,1} & \dots & X_{0,1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{0,n,1} & \dots & X_{0,n,n} \end{pmatrix}$$

其中 $X_{0,i,j}$ 表示 X_0 的代数余子式

$= X^{-1}|_{X=X_0}$ 还可以进一步用矩阵的逆表示

7. 硬算吧.

8. 考虑 $f(\lambda) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\lambda^2}}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$ 证明该函数不是解析函数, 但在复平面上处处满足 Cauchy-Riemann 方程.

~~① 满足 Cauchy-Riemann 方程 $f(\alpha + i\beta) = u + iv$ $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \beta} = -\frac{\partial v}{\partial \alpha}$~~

~~令 $\lambda = \alpha + i\beta$ 在 $\lambda \neq 0$ 时 $f(\lambda)$ 处处可导, 令 $\lambda = 0$ 时 $f(\lambda)$ 不可导.~~

~~令 $\lambda = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$~~

~~$f(\lambda) = e^{-\frac{1}{\lambda^2}} = e^{-\frac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta}} = e^{-\frac{1}{\rho^2} \cos 2\theta} e^{i \frac{1}{\rho^2} \sin 2\theta}$~~

在 $\lambda \neq 0$ 时 $\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$ (式子里只有 λ , 无 λ). 因此是全纯的, 也是解析函数.

在 $\lambda \neq 0$ 时, 一直满足 Riemann 方程

$\therefore$ 只需考虑 $\lambda = 0$ 的情况.

$f'(\lambda)_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}} - 0}{\lambda - 0} = \frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda} \therefore f'(0) = 0$

$f''(\lambda)_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda^2}$

由 $f'(\lambda) = 0 \therefore f''(0) = 0$ 很认真, 牛!

用数学归纳法 $f^{(n)}(0) = 0$

$\therefore f(\lambda) = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ 显然不成立, 因此该函数不是解析函数.

$f'(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

因此满足 Riemann 方程.

$\therefore f$ 不解析, 但满足 Cauchy Riemann 方程

2023.9.25 week 3.

1. K 是 $\mathbb{C}$ 子域, R 是 K 子域。

证明 $K=R$ 或 $K=\mathbb{C}$, 即不存在介于 $\mathbb{C}$ 和 R 之间的域

$$R \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$$

① 若 $\exists a_0 \neq 0$, 使 $a_0 \in K$

$$\because K \text{ 对除法封闭} \Rightarrow \frac{a_0 i}{a_0} = i$$

$$K \text{ 对乘法封闭} \Rightarrow \forall \lambda \in R, \lambda i \in K$$

$$K \text{ 对加法封闭} \Rightarrow \forall s \in R, s + \lambda i \in K$$

$$\therefore K = \mathbb{C}$$

逻辑有问题。

$$\text{假设} \exists R \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$$

$$\text{且 } K \neq R \text{ 且 } K \neq \mathbb{C}$$

$$\rightarrow K = \mathbb{C} \text{ 矛盾}$$

② 若 $a_0 = 0$, 则 $K = R$.

$\therefore$ 不存在。...

-1

2. K 是 $\mathbb{C}$ 的子域, 定义运算 $\oplus: K^2 \times K^2 \rightarrow K^2$ 和 $\boxtimes: K \times K^2 \rightarrow K^2$.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix}$$

$$K \boxtimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ka \\ Kb + \underbrace{K(K-1)a^2} \end{bmatrix}$$

证明: K 在加法团和数乘团下构成 K 上的向量空间 $\because K$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域 $\therefore K = \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$

① 加法交换律 $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$

② 加法结合律 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 + a_3 \\ b_2 + b_3 + a_2 a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 \end{bmatrix}$

③ 加法单位元 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

④ 数乘单位元 1

$$1 \boxtimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

⑤ 加法单位元 $\forall \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 存在 $\begin{bmatrix} -a \\ -b+a^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -a \\ -b+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⑥ 数域对加法单位元为0, 是线性空间 ($K=(\mathbb{C}, \mathbb{R})$)

$$⑦ (\lambda_1 + \lambda_2) \boxtimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)a \\ (\lambda_1 + \lambda_2)b + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}{2} a^2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \boxtimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \boxplus \lambda_2 \boxtimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a \\ \lambda_1 b + \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)}{2} a^2 \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} \lambda_2 a \\ \lambda_2 b + \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)}{2} a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)a \\ (\lambda_1 + \lambda_2)b + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 - \lambda_2}{2} a^2 + \lambda_1 \lambda_2 a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)a \\ (\lambda_1 + \lambda_2)b + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}{2} a^2 \end{bmatrix}$$

$$⑧ (\lambda_1 \lambda_2) \boxtimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 a \\ \lambda_1 \lambda_2 b + \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 \lambda_2 - 1)}{2} a^2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 \boxtimes \lambda_2 \boxtimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_1 \boxtimes \begin{bmatrix} \lambda_2 a \\ \lambda_2 b + \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)}{2} a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 a \\ \lambda_1 \lambda_2 b + \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - 1)}{2} a^2 + \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - 1)}{2} \lambda_2^2 a^2 \end{bmatrix} = (\lambda_1 \lambda_2) \boxtimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$\therefore K^2$ 在相加和 $\boxtimes$ 构成 K 上的向量空间

★ 若 K 是特征为0的域, n 是正整数, 思路: 证明 K^n 不能表示成有限个真子空间的并 (原命题为真)

证明: K^n 不能表示成有限个真子空间的并

由 syllabus 上: 当基域的特征为0时, 向量空间不能表示成有限个真子空间的并 [真子空间满足] 该基域为无限域

思路: 用 $F_1 + F_2 \subseteq F$ 来证 (其中会用到 $\text{char}(K)=0$) + 数学归纳法

1° $S=1$ 时, 显然成立

2° 设 $S=m$ 时, 结论成立. 即 $V \neq V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$

3° 当 $S=m+1$ 时,

因为 $V \neq V_1 \cup \dots \cup V_m$, 故 $\exists \alpha \in V, \alpha \notin V_1 \cup \dots \cup V_m$

考虑 $\alpha \notin V_{m+1}, \alpha \notin V_1 \cup \dots \cup V_m, \alpha \in V$. 验证.

$\alpha \in V_{m+1}$, 又 $V \neq V_2 \cup \dots \cup V_{m+1}$, 故 $\exists \beta \in V$ 且 $\beta \notin V_2 \cup \dots \cup V_{m+1}$

考 \$\beta\$ $\left\{ \begin{array}{l} \beta \notin V_1, \text{ 则 } \beta \notin V_1 \cup \dots \cup V_{m+1}, \beta \in V, \text{ 为证} \\ \beta \in V_1, \text{ 看 } \alpha + a\beta, \forall a, \alpha + a\beta \in V. \text{ 当 } a \neq 0 \text{ 时, } \alpha + a\beta \notin V_1 \cup V_{m+1} \end{array} \right.$

对于 \$V_2 \dots V_m\$, 若 \$\exists a_{i1}, a_{i2}\$, 使 \$\alpha + a_{i1}\beta \in V_i, \alpha + a_{i2}\beta \in V_i\$

则 \$(a_{i2} - a_{i1})\beta \in V_i, a_{i2} = a_{i1} \therefore \forall V_i\$, 至多一个 \$a_i\$, 使 \$\alpha + a_i\beta \in V_i\$

因此 对于 \$\alpha + a_i\beta\$, 至多 \$m-2\$ 个在 \$V_1 \cup \dots \cup V_{m+1}\$ 中, 与 \$\text{char}(K)=0\$ 矛盾.

\$\therefore K^n\$ 不能表示成有限个真子空间的并.

4. 若 \$V\$ 是 \$R\$ 上不超过 5 次的多项式全体构成的向量空间, \$D\$ 是 \$V\$ 上的求导算子.

选取 \$V\$ 的一组基, 在这组基下写出 \$D\$ 的表示矩阵, 并求出其所有特征值

$$V: p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5$$

$$\therefore V \text{ 的基为 } \begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + 5a_5 z^4$$

$$\therefore \text{求导算子 } D = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 5 & 0 & & & & \\ & 4 & 0 & & & \\ & & 3 & 0 & & \\ 0 & & & 2 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - D| = \begin{vmatrix} \lambda & & & & & \\ -5 & \lambda & & & & \\ & -4 & \lambda & & & \\ & & -3 & \lambda & & \\ & & & -2 & \lambda & \\ & & & & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^6 = 0 \quad \therefore \lambda_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

\$\therefore\$ 所有特征值为 0

5. 若 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ 成立.

证明: f 是线性映射.

$\forall \lambda \in \mathbb{Q}$, 若 $\lambda = \frac{p}{q}$ (p 与 q 互质且均为整数).

线性映射 $\left\{ \begin{array}{l} \text{可加性 } f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ 已证} \\ \text{齐性 } f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ 待证.} \end{array} \right.$

$$f(x) = f\left(q \cdot \frac{x}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{q} + \frac{x}{q} + \dots + \frac{x}{q}}_{q \text{ 个}}\right) = q f\left(\frac{x}{q}\right) \therefore f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{f(x)}{q}$$

$$f(\lambda x) = f\left(\frac{p}{q} \cdot x\right) = f\left(p \cdot \frac{x}{q}\right) \stackrel{\substack{\uparrow \\ p \text{ 个相加}}}{=} p f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q} f(x) = \lambda f(x)$$

$\therefore$ 当 $\lambda \neq 0$ 时, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

当 $\lambda = 0$ 时, $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \therefore 0 f(x) = f(0 \cdot x)$

$\therefore$ 齐性成立 $\therefore f$ 是线性映射 $\downarrow$ $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x)$
 $\therefore$ 为奇函数.

6. 证明: $\mathbb{C}^n$ 上 p -范数满足 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, ($x \in \mathbb{C}^n$)

有点迷糊, 是要证 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \max_i |x_i|$ 吗 (因为假设 $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ 是成立的)

$$\text{左式} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} x_{\max} \sqrt[p]{\left|\frac{x_1}{x_{\max}}\right|^p + \dots + 1 + \dots + \left|\frac{x_n}{x_{\max}}\right|^p}$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} x_{\max} \left(1 + \frac{\left|\frac{x_1}{x_{\max}}\right|^p + \dots + \left|\frac{x_n}{x_{\max}}\right|^p}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right) \right) = x_{\max}$$

$$\therefore \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

f

7. 已知 n, m, k 是正整数. V 是 R^n 上的 n 维向量空间, 现有 V 中有 m 组向量, 每组中均含有 k 个线性无关的向量. 8.

证明: 在 V 中必存在 $n-k$ 个向量, 这 $n-k$ 个向量与上面任给一组向量合在一起都能构成 V 的一组基.

法一: 基的坐标变换. $V \in R^n \therefore V$ 的基有 n 个.

不妨取 $x_1 = (1, 0, \dots, 0)_n, x_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)_n, \dots, x_n = (0, 0, \dots, 1)_n$
 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

取 $|P_i| \neq 0, P_i x = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}$ 使 $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}$ 为第 i 组向量中的 k 个线性无关向量.

同理有 m 个 P_i , 使 $P_i x = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}$ 使 $x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}$ 为第 i 组向量中 k 个线性无关向量.

$\therefore P_m P_{m-1} \dots P_1 x = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ 取 $\tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n$ 这几个基向量.

其中 $|P_m \dots P_1| \neq 0 \therefore \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ 之间线性无关.

且 $\tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n$ 与 m 组中任给 k 个向量线性无关.
 可构成 n 个线性无关组

$\therefore$ 得证

法二: 维数公式 ~~证明~~

每一组 k 个基, 张成一个子空间 V_i

由 3. 维数定理 $V \neq V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$

需寻找一个 $\tilde{V}$, $\dim(\tilde{V} \cap V_i) = 0, \dim(\tilde{V}) = n-k$. [假设 $\dim(\tilde{V}) = n-k$]

此时: $\tilde{V}$ 中有 $n-k$ 个基向量, 与任给 V_i 的 k 个基向量加起来有 n 个基向量线性无关组, 为 V 的一组基. 好像找不到了?

8. 若 K 是包含 R 的域, 并可视为 R 上的 n 维向量空间, 其中 n 是某个正整数。

证明 $n \neq 3$ 。即相反说明不存在三元数域。

两个假设之间矛盾, 考虑复数 $a+bi \Leftrightarrow (a,b)$ 只需将 R 在 R^n 中没有的部分视为即可。

假设三元数域中每个数都可以表示为 $a+bi+cj$

(有题中所给三元数域)

~~ps:~~
$$ixi = \lambda_1 + \lambda_2 i + \lambda_3 j \quad jxj = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 i + \varepsilon_3 j \quad ixj = \delta_1 + \delta_2 i + \delta_3 j$$

ps: 证明: 以 R 为子域的三元数域只可能是复数域 (其他都为同构) 先考虑两个元素, 再把第三个加上。

$$\text{故 } ixi = -1 \quad jxj = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 i + \varepsilon_3 j \quad ixj = \delta_1 + \delta_2 i + \delta_3 j$$

$$ixixj = -j = \delta_1 i - \delta_2 + \delta_3 ixj = \delta_1 i - \delta_2 + \delta_3 (\delta_1 + \delta_2 i + \delta_3 j)$$

$$\therefore \delta_1 \delta_3 - \delta_2 + (\delta_1 + \delta_2 \delta_3) i + (\delta_3^2 + 1) j = 0$$

$$\therefore \delta_3^2 + 1 = 0 \text{ 矛盾}$$

$\therefore$ 不存在

$$\dim(V) + \dim(V_i) = \dim(V + V_i) + \dim(V \cap V_i)$$

2023.10.9 week6 chaps 二次型 chap6 特征值.

1. 已知 n 和 i 是正整数, 若 $A \in C^{n \times n}$ 是 Hermite 半正定矩阵, 且 A 的第 i 个对角元为 0.

证明: A 的第 i 行所有元素都为 0.

$\because A$ 半正定

$\therefore$ 取含 a_{ii} 的一二阶主子式.

$$\forall j \neq i \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \text{ 或 } \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{ji} \\ a_{ij} & a_{ii} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{ji}a_{ij} = -a_{ji}a_{ij}$$

$$= -a_{ij}^2 \geq 0 = -a_{ij}^2 \geq 0$$

$$\therefore \forall j \neq i, a_{ij} = 0$$

$\therefore A$ 的第 i 行所有元素都为 0

2. 已知 n 是正整数, 若 $A, B, A-B$ 都是 n 阶 Hermite 正定实矩阵.

证明: $B^{-1} - A^{-1}$ 也是 Hermite 正定实矩阵

$\because A, B, A-B$ 是 n 阶 Hermite 正定实矩阵

$$\therefore \forall x \quad x^* A x > 0 \quad x^* B x > 0 \quad x^* (A-B) x > 0$$

$$x^* A x > x^* B x > 0$$

主要
谱分解 A 可以分解为 $A = Q_1^* \Lambda_1 Q_1$ 其中 Q_1, Q_2 为酉矩阵,
 B 同理 $B = Q_2^* \Lambda_2 Q_2$ Λ_1, Λ_2 为对角阵

$$\text{正定矩阵惯性指数 } I_{n+}(A) = I_{n+}(B) = n. = I_{n+}(\Lambda_1) = I_{n+}(\Lambda_2)$$

ps: 反证法: 若 $I_{n+}(A) < n$ (关键性质: 合同变换后惯性指数不变)

$$\text{则 } \exists \text{ 特征值 } \lambda < 0 \quad Ax = \lambda x$$

$$x^* A x = x^* \lambda x = \lambda x^* x < 0 \text{ 与正定矛盾}$$

$\therefore$ 正定实矩阵惯性指数一定为 n .

$\therefore \Lambda_1, \Lambda_2$ 为对角元全为正的实矩阵 (且只有对角线上有非零)

$$A^{-1} = Q_1^* \Lambda_1^{-1} Q_1 \quad B^{-1} = Q_2^* \Lambda_2^{-1} Q_2 \quad (\text{其中 } \Lambda_1^{-1} \text{ 和 } \Lambda_2^{-1} \text{ 表示 } \Lambda_1^{-1}, \Lambda_2^{-1})$$

$$\therefore X^* A X > X^* B X > 0$$

$$\therefore (Q_1 X)^* \Lambda_1 (Q_1 X) > (Q_2 X)^* \Lambda_2 (Q_2 X) > 0$$

$$\therefore (Q_2 X)^* \frac{1}{\Lambda_2} (Q_2 X) > (Q_1 X)^* \Lambda_1 (Q_1 X) > 0$$

$$\therefore X^* B^{-1} X > X^* A^{-1} X > 0$$

$$\therefore X^* (B^{-1} - A^{-1}) X > 0 \quad \therefore B^{-1} - A^{-1} \text{ 也是 Hermitian 正定矩阵}$$

3. 已知 n 是正整数, 若 $A \in C^{n \times n}$ 是 Hermitian 矩阵, $B \in C^{n \times n}$ 是 Hermitian 正定矩阵.

证明: 存在非奇异矩阵 $X \in C^{n \times n}$ 使得 $X^* A X$ 和 $X^* B X$ 都是对角矩阵

$\because B$ 是正定的

实对称.

$$\therefore \exists Y \text{ 非奇异 } Y^* B Y = I \Rightarrow (Q^* I Q = I \text{ 酉矩阵})$$

$\because A$ 是 Hermitian

$$\therefore Y^* A Y \text{ 也是 Hermitian } ((Y^* A Y)^* = Y^* A Y)$$

~~$\therefore$ 可以用合同变换变成对角阵~~

$$\therefore \exists Z \text{ 非奇异 } Z^* Y^* A Y Z = A$$

(谱分解): 可以用正交变换, 将其变成对角阵.

$$\exists Q \text{ 非奇异 } Q^* Y^* A Y Q = \Lambda$$

$$\text{同时 } Q^* Y^* B Y Q = Q^* I Q = I$$

$\therefore$ 取 $X = YQ$, ~~Y, Q 非奇异~~, $X = YQ$ 非奇异即可.

PS: 白皮书 P544. $X^* A X = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. $X^* B X = I$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 $B^{-1}A$ 的特征值

$$Q^* Y^* (\lambda B - A) Y Q = \lambda I - X^* A X = \text{diag}\{\lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_n\}$$

$\therefore \lambda_i$ 是多项式 $|\lambda B - A|$ 的根, $(\Rightarrow |\lambda I_n - B^{-1}A|$ 的根

PS: 补充定理: 若 A, B Hermitic, 则 $AB=BA \Leftrightarrow A$ 与 B 可同时对角化 即 $Q^* A Q = \Lambda \quad Q^* B Q = \Lambda$

4. 若 n 是正整数, $A, B \in C^{n \times n}$ 实对称, 即 $AB=BA$ 学习条件

证明: 存在酉矩阵 $Q \in C^{n \times n}$ 及 $Q^* A Q$ 和 $Q^* B Q$ 都是 Λ 上三角阵.

Schur 定理 $A = Q^* \Lambda Q$

PS: 证明: $P^{-1} A P = T \quad R^{-1} Q^* A Q R = T \quad Q^* A Q = R T R^*$

思路: 因为 $AB=BA$, 所以猜想 A 和 B 分别有 Hermitic 定理类似的性质, 即可以同时对角化.

用数学归纳法:

1° $n=1$ 时, 显然满足

2° 假设 $n-1$ 阶矩阵满足 $Q^* A_{n-1} Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \quad Q^* B_{n-1} Q = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} \end{bmatrix}$

$\therefore n$ 阶时, 由于 $AB=BA$, 所以取 A 和 B 共同的特征向量 $\alpha_i, A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, B\alpha_i = \mu_i \alpha_i$

证明: 假设 α 是 B 的特征向量, 即 $\alpha \in \ker(\lambda I - B) = V_B, B\alpha = \lambda \alpha$

$\forall \alpha \in \ker(\lambda I - B), B A \alpha = A B \alpha = \lambda A \alpha \quad \therefore A \alpha \in \ker(\lambda I - B) = V_B$

$\therefore V_B = \ker(\lambda I - B)$ 是 B -不变子空间, $(B|_{V_B})$ 是良定的线性算子

有特征值 $\mu \in \begin{cases} \sigma_{\text{Ker}(\lambda I - A)} \\ \sigma_{\text{Ker}(\lambda I - B)} \end{cases}$

$\therefore$ 当 $AB=BA$ 时, A 和 B 有共同的特征向量

将 α_i 扩充为 C^n 的一组基.

α 与位置变换: $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$

$AB=BA \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ii} B_{ii} = B_{ii} A_{ii}$

由归纳假设 $Q^* A_{n-1} Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \quad Q^* B_{n-1} Q = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} \end{bmatrix}$

(验证) 取 α_i 时 α_i 与 α_j 正交, 若 α_i 不正交, 则对其进行了 QR 分解

令 $P_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, P_n = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \quad \therefore$ 取 $G = P_n P_{n-1} \quad G^* G = P_{n-1}^* P_n P_{n-1} P_n$

从而 $G^* A G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad G^* B G = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$

$= P_{n-1}^* P_{n-1}$
 $= I$
为酉阵

总结: 数学归纳法 同时上三角阵对角元是特征值.

PS: 对 $\text{vec}(Q_k)$ 向量序列用 Weierstrass 定理

3. 若 $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ 是收敛于 A 的复方阵序列 $A_k = Q_k T_k Q_k^*$ 是 A_k 的 Schur 分解.

证明: $\exists (Q_k)_{k=1}^{\infty}$ 的收敛子列 $(Q_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, 使 $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{k_n}$ 是酉阵且 $Q^* A Q$ 是上三角阵

① 存在性证明:

1) n 阶酉矩阵集合在 n 阶复方阵集 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有界: } 1 \leq \|A\| \leq 2 \Rightarrow \text{紧集} \\ \text{闭集: } \mathbb{C}^{n \times n} \end{array} \right.$ 中

2) 类 Weierstrass 定理作用: 有界序列必有收敛子列

设方阵阶数为 m , $\text{Re} \| \text{vec}(Q_k) \| = m$, $\text{vec}(Q_k)$ 中每个元素有界, 所以 $\text{vec}(Q_k)$ 有界

$$\text{对于 } Q \text{ 中的每两列 } q_i^* q_j = \lim_{n \rightarrow \infty} q_{in}^* q_{jn} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\therefore Q$ 是闭集

$\therefore \exists (Q_k)_{k=1}^{\infty}$ 的收敛子列 $(Q_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ 使 $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{k_n}$

数分知识 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有界} \Rightarrow \text{紧集} \\ \text{闭集} \end{array} \right.$ (即收敛子列和极限)

② 上海证明:

1) 矩阵相乘极限 = 矩阵极限相乘

2) 上海矩阵列极限一定是上海阵

因为矩阵相乘是有限次运算 ($*$ 和 $\div$), 按 Q_k 中 Q_{k_n} 的方法从 A_k 中取 A_{k_n}

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{k_n}^* A_{k_n} Q_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{k_n}^* \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} A_{k_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{k_n} = Q^* A Q$$

$$\therefore Q^* A Q = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{k_n} \text{ 为上海阵}$$

ps. 第二题法二: 重要等式 $B^{-1} - A^{-1} = (B + B(A-B)^{-1}B)^{-1}$

证明: $(B + B(A-B)^{-1}B)(B^{-1} - A^{-1})$

$$= I_n + B(A-B)^{-1}B - BA^{-1} - B(A-B)^{-1}BA^{-1}$$

$$= (A-B)(A-B)^{-1} + B(A-B)^{-1}B - (A-B)(A-B)^{-1}BA^{-1} - B(A-B)^{-1}BA^{-1}$$

$$= A(A-B)^{-1} - A(A-B)^{-1}BA^{-1}$$

$$= A(A-B)^{-1}(AA^{-1} - BA^{-1}) = A(A-B)^{-1}(A-B)A^{-1} = I_n$$

$\therefore$ 等价于证 $(B + B(A-B)^{-1}B)^{-1}$ 正定, 等价于证 $B + B(A-B)^{-1}B$ 正定

$\therefore (A-B)$ 正定 $\therefore (A-B)^{-1}$ 正定.

$$\therefore \text{合同标准形 } X^T(A-B)X = I \Rightarrow X^T(A-B)^{-1}X = I_n$$

$$\therefore (A-B)^{-1} = X \cdot X^T \quad (\text{ps: 正定所以可以 Cholesky 分解})$$

$$\therefore \underbrace{B(A-B)^{-1}B}_{\text{正定}} = BX \cdot X^T B^T = (BX)(BX)^T$$

又 $\because B$ 正定

$$\therefore X^T(B + B(A-B)^{-1}B)X$$

$$= X^T B X + X^T B(A-B)^{-1} B X > 0$$

$\therefore B^{-1} - A^{-1}$ 正定.

6. (选做) 证明 Schur 乘积定理: 已知 n 是正整数, 若 $A, B \in C^{n \times n}$ 都是 Hermitian 矩阵, 且 $A \geq 0, B \geq 0$, 则 $A \circ B$ 也是 Hermitian 矩阵. ($\circ$: 表示 Hadamard 乘积)

证: 将 A Cholesky 分解. $A = R^* R$ $\therefore a_{kj} = r_k^* r_j = \sum_{\ell} r_{\ell k} \cdot r_{\ell j}$

$$\therefore X^* C X = \sum_{k,j} a_{kj} b_{kj} x_k x_j = \sum_{k,j} \sum_{\ell} r_{\ell k} r_{\ell j} x_k x_j \cdot b_{kj}$$

$$= \sum_{k,j} \sum_{\ell} (r_{\ell k} x_k) b_{kj} (r_{\ell j} x_j) = (R X)^* B (R X) \geq 0$$

$\therefore C$ 正定.

$$\text{又 } C_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij} = b_{ji} \cdot a_{ji} = C_{ji} \therefore \text{Hermitian.}$$

$\therefore C$ 是 Hermitian 矩阵

PS: 对于展开和合并 (矩阵形式和展开形式的转换要熟练)

7. (选做) $A, B, A-B$ 都是 n 阶 Hermitian 矩阵,

求证 $A^2 - B^2$ 不一定是 Hermitian 矩阵

$$\text{取 } A = \begin{pmatrix} 2.0011 & 0.001 \\ 0.001 & 1.001 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A, B, A-B \text{ 都正定}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2.0011 & 0.001 \\ 0.001 & 1.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0011 & 0.001 \\ 0.001 & 1.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.00440221 & 0.0030021 \\ 0.0030021 & 0.002002 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0.00440221 & 0.0030021 \\ 0.0030021 & 0.002002 \end{pmatrix} \text{ 非正定}$$

举例思考: 用倍数的来凑 0.001, 使其变成 2^{2+} 2^{+1} 这种形式.

$$\star \begin{pmatrix} K_1 + 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & K_2 + 0.001 \end{pmatrix}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} K_1^2 & K_1 K_2 \\ K_1 K_2 & K_2^2 \end{pmatrix} \text{ 取行列式小于 0}$$

$A-B$ 是正定的

循环 Schur 分解

8. (证做). 给定 n 阶复矩阵 $A_1, A_2, \dots, A_m$.

证明: 一定存在 n 阶酉阵 $Q_1, \dots, Q_m$ 使

$$Q_1^* A_1 Q_2, Q_2^* A_2 Q_3, \dots, Q_m^* A_m Q_1 \text{ 都是上三角矩阵}$$

思路①由 A 可逆来推 A 不可逆 (摄动法)

② 先找 Q_1 , 再找 $Q_2, \dots$ 以此类推.

解: 1. 假设 $A_1, \dots, A_m$ 均为可逆矩阵

① 找 Q_1 , $A_1 \dots A_m = Q_1^* R Q_1$

② 找 Q_2 , $A_1^* Q_1^* = Q_2^* R_1$ (QR 分解)

$$A_1 = Q_1^* R_1^{-1} Q_2^* \text{ 也是上三角}$$

③ 找 Q_3 , $A_2 \dots A_m = Q_2^* (R_1 R) Q_1$

$$A_2^* Q_2^* = Q_3^* R_2$$

$$A_2 = Q_2^* R_2^{-1} Q_3^* \text{ 也是上三角}$$

④ 以此类推, $A_{m-1} = Q_{m-1}^* R_{m-1}^{-1} Q_m^*$

$$A_m = Q_m^* (R_{m-1} \dots R_1 R) Q_1$$

三角

∴ 对于非奇异矩阵, 结论成立

2. 对于一般的 A_i

有一列 $\varepsilon_k \rightarrow 0$ 使 $A_i + \varepsilon_k I$ 可逆且 $Q_i(\varepsilon_k)$ 酉阵极限存在.

∴ 由摄动法, 非奇异也成立

为酉阵

10 非常好!

L_i 10/16

2. 若 n 为正整数, $\|\cdot\|$ 是 $C^{n \times n}$ 上的相容范数, $P \in C^{n \times n}$ 是非奇异矩阵.

证明: $f(X) = \|P^{-1}XP\|$ 也是 $C^{n \times n}$ 上的相容范数.

$$\Leftrightarrow \text{证 } \forall X, Y \in C^{n \times n} \quad f(XY) \leq f(X) \cdot f(Y)$$

$$\Leftrightarrow \|P^{-1}XYP\| \leq \|P^{-1}XP\| \|P^{-1}YP\|$$

$$\|P^{-1}XYP\| = \|P^{-1}XP P^{-1}YP\| \leq \|P^{-1}XP\| \|P^{-1}YP\|$$

$\therefore f(X)$ 也是相容范数.

3. n 是正整数, $\|\cdot\|$ 表示 C^n 上某个向量范数, 及其诱导的矩阵范数 (p-范数)

证明: 对于非奇异矩阵 $A \in C^{n \times n}$, 有 $\frac{1}{\|A^{-1}\|} = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|$

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| &= \max_{\substack{x \neq 0 \\ \Rightarrow \|Ax\| \neq 0}} \frac{\|A^{-1}(Ax)\|}{\|Ax\|} = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|Ax\|} = \max_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Ax\|} \\ &= \frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{\|A^{-1}\|} = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

4. 若 n 是大于 1 的正整数, $A \in C^{n \times n}$ 或 $\|A\|_{\max} = \|\text{vec}(A)\|_{\infty}$

证明: $\|\cdot\|_{\max}$ 不相容, 并求 $\alpha_{\min}$ 使 $\alpha \|\cdot\|_{\max}$ 相容

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|A^2\|_{\max} = 2 > \|A\|_{\max} \cdot \|A\|_{\max} = 1 \quad \therefore \text{不相容.}$$

$\Rightarrow$ 求 $\alpha_{\min}$ 使 $\forall A, B \in C^{n \times n}, \|AB\| \leq \alpha \|A\| \|B\|$ 恒成立.

$$\alpha \geq \frac{\|AB\|}{\|A\| \|B\|} \quad \text{求 } \frac{\|AB\|}{\|A\| \|B\|} \max$$

$$\frac{\|AB\|}{\|A\| \|B\|} = \frac{\max_{i,j} a_i^T b_j}{a_{\max} \cdot b_{\max}} \leq \frac{n a_{\max} \cdot b_{\max}}{a_{\max} \cdot b_{\max}} = n \quad \therefore \alpha_{\min} = n$$

即 $\alpha = n$ 时取 α

主要不等式.

5. 若 m, n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 证明: $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$

思路: $\|A\|_2^2 = \|AA^T\|_2$ $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$ 转置 + 谱半径(奇异值)

$\exists$ 矩阵, 使 $A \cdot A^T z = u^2 z$ 其中 u^2 为 AA^T 奇异值 $\max$

为的是不同范数可以 u 也为 A 奇异值 $\max$.

转换

$\therefore u = \|A\|_2$

$$\|A\|_2^2 \|z\|_1 = u^2 \|z\|_1 = \|u^2 z\|_1 = \|A \cdot A^T z\|_1 \leq \|A\|_1 \|A^T\|_1 \|z\|_1 = \|A\|_1 \|A\|_\infty \|z\|_1$$

$$\therefore \|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$$

6. n 是正整数, 给定 $x \in \mathbb{C}^n$ 以及 $p \geq 1$, 在约束条件 $\|x\|_p = 1$ 下,

求 $f(x) = |x^* v|$ $\max$

取 $X = \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \\ \vdots \\ x^* \end{pmatrix}_{n \times n}$

$$|x^* v| \leq \|x\|_p \|v\|_q$$

$$|x^* v| \leq \|v\|_q$$

$$\|Xv\|_p = \left\| \begin{pmatrix} x^* v \\ x^* v \\ \vdots \\ x^* v \end{pmatrix} \right\|_p = \sqrt[p]{n} |x^* v|$$

$$\therefore f(x) = \frac{\|Xv\|_p}{\sqrt[p]{n}}$$

$$\|Xv\|_p \leq \|X\|_p \|v\|_p$$

$$\|X\|_p = \max_{\|x_0\|_p=1} \|Xx_0\|_p = \sqrt[p]{n} |x^* \cdot x_0|$$

$$\therefore f(x) = |x^* \cdot x_0| \cdot \|v\|_p$$

$$\therefore \text{当 } |x^* \cdot x_0| = 1 \text{ 时, } f_{\max} = \|v\|_p$$

$$\text{此时 } x^* = x_0$$

q 是 p 的对偶数
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

用 Hölder 不等式.

$$= (a_{\max}, a_{\max}, \dots, a_{\max}) \quad b_j = \begin{pmatrix} b_{\max} \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix} \text{即可}$$

7. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是非奇异矩阵, $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $\|A^{-1}E\|_p < 1$.

证明: $A+E$ 非奇异, 且当 $1 \leq p \leq \infty$ 时

$$\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\|_p \leq \frac{\|A^{-1}\|_p^2 \|E\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p}$$

Neumann级数. 方阵 A , 当 $\rho(A) < 1$ 时, $\sum A^k$ 收敛, $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$

在题目中, 令 ~~$A+E$~~ $F = -A^{-1}E$ $A+E = A(I-F)$

$\therefore A+E$ 非奇异 $\Leftrightarrow I-F$ 非奇异

① 反证法: 若 $I-F$ 奇异, 则 $\exists x \neq 0, (I-F)x = 0, Fx = x$ 有非零解 $\Rightarrow$ 范数 $\|Ax\|_p = \|x\|_p$ 与 $\|A^{-1}E\|_p < 1$ 矛盾.
 $\therefore I-F$ 非奇异 $\therefore A+E$ 非奇异

② 由 Neumann级数.

$$\| (I-F)^{-1} \|_p = \| \sum F^k \|_p \leq \sum \|F\|_p^k = \frac{1}{1 - \|F\|_p}$$

$$\begin{aligned} (A+E)^{-1} - A^{-1} &= -A^{-1}E(A+E)^{-1} \\ &= F(A+E)^{-1} = F(I-F)^{-1} \cdot A^{-1} = -A^{-1}E(I-F)^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \|(A+E)^{-1} - A^{-1}\|_p \leq \|A^{-1}\|_p^2 \|E\|_p \|(I-F)^{-1}\|_p \leq \frac{\|A^{-1}\|_p^2 \|E\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p}$$

对的, 题目说 $\|E\|_p < 1$

过, 已经改过了

$$(A+E)X = -EA^{-1}$$

8. 若 m, n 是大于 1 的正整数, 证明: $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的 Frobenius 范数不能由任何自范范数诱导。

取 $I_{m \times n} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

$\|I\|_F = \sqrt{\min\{m, n\}} > 1 = \|I\|_p$ $\therefore$ 不能由任何自范范数诱导。

很好!

Li 9/18

Week 4 2025 chap4 向量空间与线性映射 chap5
 $\mathbb{R}$ 向量空间与线性映射 $\mathbb{R}$ -环型

1. K 是 $\mathbb{C}$ 的子域, n_1, n_2, n_3, n_4 是正整数, $A \in K^{n_1 \times n_2}$, $B \in K^{n_2 \times n_3}$, $C \in K^{n_3 \times n_4}$

证明 Frobenius 不等式:

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) \quad \text{典}$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) &= n_3 - \text{NULL}(AB) & \text{rank}(ABC) &= n_4 - \text{NULL}(ABC) \\ \text{rank}(BC) &= n_4 - \text{NULL}(BC) & \text{rank}(B) &= n_3 - \text{NULL}(B) \\ \therefore \text{Frobenius 不等式} & \Leftrightarrow \\ \text{NULL}(B) + \text{NULL}(ABC) & \leq \text{NULL}(AB) + \text{NULL}(BC) \end{aligned}$$

法一: 秩等式常用方法: 分块矩阵

$$\text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) = \text{rank} \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{rank} \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} -BC & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$$

$$\geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC)$$

$$\therefore \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC)$$

法二: 矩阵相抵分解

$$\text{设 } \text{rank}(B) = r. \text{ 则 } B = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \quad (P, Q \text{ 可逆})$$

$$= \underbrace{P \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} Q}_R = LR \text{ 秩分解}$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(ABC) &= \text{rank}(ALRC) \geq \text{rank}(AL) + \text{rank}(RC) - r \\ &\geq \text{rank}(ALR) + \text{rank}(LRC) - r \\ &= \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B) \end{aligned}$$

法三: 维数公式 (本质: 用映射角度去思考问题) ★ 普遍方法 ★ 常用 ★

$B: U \rightarrow V$ $A: V \rightarrow W$, 则 $\text{Im } B$ 是 V 的子空间

考虑 A 在 $\text{Im } B$ 上的限制映射 $A|_{\text{Im } B}: \text{Im } B \rightarrow W$

$$\begin{aligned} \text{由维数公式 } \dim \text{Im } B &= \dim \text{Im}(A|_{\text{Im } B}) + \dim \text{Ker}(A|_{\text{Im } B}) \\ &= \dim \text{Im } AB + \dim (\text{Ker } A \cap \text{Im } B) \end{aligned}$$

$$\therefore \dim \text{Im } B - \dim \text{Im } AB = \dim (\text{Ker } A \cap \text{Im } B)$$

$$\text{类似地, 有 } \dim \text{Im } BC - \dim \text{Im } ABC = \dim (\text{Ker } A \cap \text{Im } BC)$$

把 $\text{Ker } A$ 放在一边, 其实移到另一边

$$BC: U \rightarrow V \quad A: V \rightarrow W \quad A|_{\text{Im } BC} = \text{Im } BC \rightarrow W$$

$$\dim \text{Im } BC = \dim \text{Im}(A|_{\text{Im } BC}) + \dim \text{Ker}(A|_{\text{Im } BC}) = \dim \text{Im } ABC$$

$$\therefore \dim \text{Im } BC - \dim \text{Im } ABC = \dim (\text{Ker } A \cap \text{Im } BC) + \dim (\text{Ker } A \cap \text{Im } BC)$$

$$\text{又由 } \text{Im } BC \subseteq \text{Im } B, \text{ 故 } \text{Ker } A \cap \text{Im } BC \subseteq \text{Ker } A \cap \text{Im } B$$

$$\therefore \dim \text{Im } BC - \dim \text{Im } ABC \leq \dim \text{Im } B - \dim \text{Im } AB$$

$$\therefore \text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B)$$

$s \times n$ 常用, 用于按矩阵形式 $n \times m$

→ Sylvester 不等式: $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$

证明: $\text{rank}(AB) + n = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}$

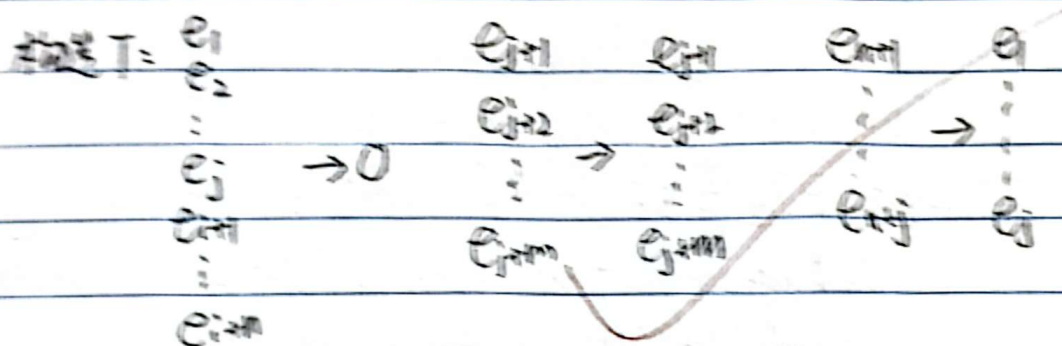
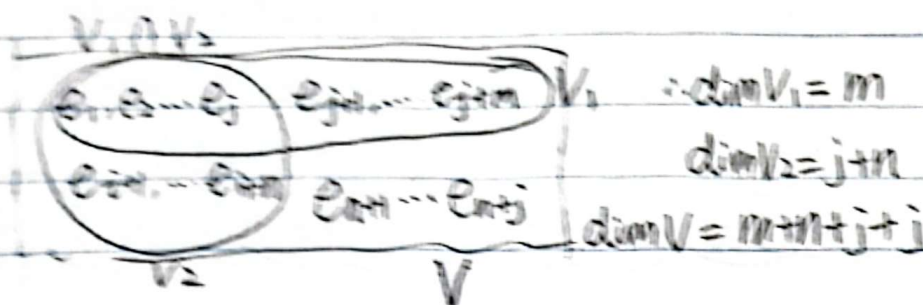
$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & C \\ A & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -B & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{rank } A + \text{rank } B \leq \text{rank} \begin{pmatrix} -B & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} = \text{rank}(AB) + n.$$

2. 若 V_1, V_2 是有限维向量空间 V 的子空间, 且满足 $\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V)$

证明: 存在 V 上的线性变换 T 使得 $\text{Range}(T) = V_1$ 且 $\ker(T) = V_2$

通过构造基来方便构造.



这样便存在

构造 $\Rightarrow$ 取基文

3. 构造可逆的线性变换 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, 将关于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的二次型 $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$

化为关于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的对角二次型

$$b = Ca \quad \therefore a = C^{-1}b$$

$$a \text{ 的二次型 } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad f(x) = a^T A a = b^T C^{-T} A C^{-1} b = b^T B b$$

B 为对角矩阵

法一: 设 $\begin{cases} \alpha_1 = y_1 \\ \alpha_2 = y_1 + y_2 \\ \alpha_3 = y_3 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_1 = y_1 \\ \alpha_2 = y_1 + y_2 \\ \alpha_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\text{则 } f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = y_1^2 + y_1 y_2 + (y_1 + y_2) y_3 + y_1 y_3$$

$$\therefore C^{-1} = C^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^2 + y_1(y_2 + 2y_3) + (\frac{y_2}{2} + y_3)^2 - \frac{y_2^2}{4} - y_3^2 \\ (y_1 + \frac{y_2}{2} + y_3)^2 - \frac{y_2^2}{4} - y_3^2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-T} A C^{-1} \text{ 设 } \begin{cases} \beta_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} + y_3 \\ \beta_2 = \frac{y_2}{2} \\ \beta_3 = y_3 \end{cases}$$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2$$

$$\therefore \begin{cases} \beta_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha_3 \\ \beta_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \\ \beta_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

$$\therefore C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T A C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{法二: } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

法三: 求特征值 & 正交变换可对角化

一、证明：已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = A$ ，证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ 。

证明：由导数的定义， $f'(x_0) = A$ 表示 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ 。

~~已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = A$ ，证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ 。~~

证：由导数的定义， $f'(x_0) = A$ 表示 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ 。

证：由导数的定义， $f'(x_0) = A$ 表示 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ 。

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$

证：由导数的定义， $f'(x_0) = A$ 表示 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ 。

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$

5. 已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 19 & 31 \\ 1 & 5 & 15 & 31 & 53 \end{bmatrix}$$

特征值: 非奇异 $\Rightarrow$ 可 Jordan 标准型
二次型: 又对称 $\Rightarrow$ 可对角化

构造一个对称矩阵 X , 使得 $AXA=A$ 且 $XAX=X$.

理由: A 为对称阵, 故可以合同标准型.

$$A = C^T \Lambda C \quad (C \text{ 非奇异})$$

对于对称阵 X , 我们这样假设 $X = C^T \Delta C$

$$\therefore C^T \Lambda \Delta \Lambda C = C^T \Lambda C$$

$$C^T \Delta \Lambda \Delta C = C^T \Delta C$$

$$\therefore \Lambda \Delta \Lambda = \Lambda \quad \Delta \Lambda \Delta = \Delta$$

$$\Lambda \text{ 为 } \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{则构造 } \Delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\lambda_n} & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ 满足上式.}$$

$$\therefore X = C^T \Delta C$$

若进行 SVD 分解, 也是一样的. $A = U \Sigma V^T$, $A^+ = V \Sigma^+ U^T$:

两个结论: ① 对于两个矩阵, 我们时常进行对角化 (等价于进行一个同构)

去研究对称阵的概念, 会方便很多 百度书 P448 至 8.4

② 伪逆可以通过 SVD 分解来求

找到一篇专门写广义逆的文章

一、广义逆矩阵 (不唯一, 可以随便取)

1. 只需要满足两个条件 $AXA=A$ 和 $XAX=X$ (即为本逆条件)

$$2. \text{定理 } A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

$$X = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & X_1 \\ X_2 & X_2 X_1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ 即可.}$$

6. 平面直角坐标系. 由方程 $xy - x^2 = 1$ 定义的曲线是双曲线.

构造一个正交变换 $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 使 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 且 (x, y) 为标准方程.

正交矩阵为旋转或翻转.

$$xy - x^2 = 1 \quad \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{对称阵}$$

其特征值顺时针旋转 $\frac{3}{8}\pi$, 坐标轴逆时针 $\frac{3}{8}\pi$.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \frac{3}{8}\pi & -\sin \frac{3}{8}\pi \\ \sin \frac{3}{8}\pi & \cos \frac{3}{8}\pi \end{bmatrix}$$

这样 $Q^T \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} Q = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & -1.25 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 标准方程. $Q = \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{8}\pi & -\sin \frac{3}{8}\pi \\ \sin \frac{3}{8}\pi & \cos \frac{3}{8}\pi \end{pmatrix}$

7. 已知 n 阶矩阵 $A, B \in C^{n \times n}$, 满足 $AB=BA$, 证明:

$$\text{rank}(A+B) + \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

法一: 分块矩阵法

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(A+B) & \\ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^2-BA & -A^2-B^2A \\ A & A+B \end{pmatrix}$$

只会让秩变小

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A^2-BA & -A^2-B^2A \\ A & A+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -BA & AB-BA \\ A & A+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -BA & 0 \\ A & A+B \end{pmatrix}$$

秩不变

$$\therefore \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \geq \text{rank}(A+B) + \text{rank}(AB)$$

目的: 证明 $AB=BA$

法二: 维数公式. ~~好!~~ 好!

$$\text{命题} (\Rightarrow) \quad \underbrace{\text{Null}(A)}_a + \underbrace{\text{Null}(B)}_b \leq \underbrace{\text{Null}(A+B)}_c + \underbrace{\text{Null}(AB)}_d$$

$$\dim a + \dim b = \dim(a \cup b) + \dim(a \cap b)$$

$$\text{其中 } a \cap b \subseteq c \quad a \cup b \subseteq d \quad (AB=BA)$$

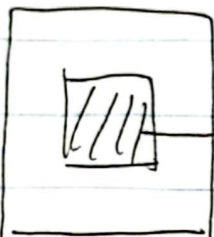
$$\therefore \dim a + \dim b \leq \dim c + \dim d \quad \text{证毕.}$$

8. 若 m, n 是正整数, 序列 $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^{m \times n}$ 收敛, 证明

$$\text{rank}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{rank}(A_k)$$

↓
为一个极限, 可以视为定值 r .

将 rank 视为最大非零子式的阶

左  $\rightarrow r$. (极限定义)
说明: $\exists N$, 在 $k > N$ 后, $\det(\text{主子式}) \neq 0$
 $\det$ 为连续函数

$\rightarrow$ 说明, 在 N 之后
都有非零的  $\rightarrow r$ $\det(\text{主子式}) \neq 0$

天才!

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} \text{rank}(A_k) \geq r = \text{rank}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right)$$

提问助教老师, 有没有稍微有一些参考资料之类? 应该没有, 邵老师的课包罗万象, 但就
每次作业都要到处查, 耗时良久, 性价比太低。做出题目而言, 可以看《高等代数》
白皮书

10 Li 10/9 非常好!

已知 m, n 为正整数, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$

证明: AB 和 BA 具有完全相同的非零特征值 (计代数重数)

当 $m=n$ 时, AB 和 BA 是否一定相似

白皮书 P297 特征值降阶公式 知识点: 特征值 & 特征向量

要证: $|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|$ (先有这样的猜测! 很重要)

特别地, 当 $m=n$ 时, AB 与 BA 有相同的特征多项式

但不一定相似, 因几何重数不同 (反例见右)

法一: 增广矩阵 (为涵盖 λ) + 行列式降阶公式

$$1^\circ \lambda \neq 0 \quad \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda I_m & 0 \\ B & I_n - \frac{1}{\lambda} BA \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|$$

2° $\lambda = 0$ $\begin{matrix} m < n \\ m > n \end{matrix}$ $AB \sim \square$ $\text{rank}(AB) \leq n < m \therefore |AB| = 0$, 也成立

$m=n$ $|AB| = (-1)^m |A||B| = |BA|$, 也成立

$$\therefore |\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA| \text{ 恒成立}$$

相抵变换思想

法二: 类 SVD 分解思想, 将 A 作 $P \circ I \circ Q$ 的拆分 (保证低秩不丢失时拆成最小) $\rightarrow$ 类似的方法

取 Q 使 $P A Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 设 $Q^{-1} B P^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$P A B P^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Q^{-1} B A Q = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$

可证:

若 $AC = CB$

$\text{rcc}(C) = r$

则 A, B 至少有 r 个相同特征值

$$\therefore |\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-r} |\lambda I_r - B_{11}| \quad \therefore |\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|$$

$$|\lambda I_n - BA| = \lambda^{n-r} |\lambda I_r - B_{11}|$$

法三: 从可逆方阵入手 $\begin{cases} \text{摄法} \Rightarrow \text{不可逆} \\ \text{增广} \Rightarrow \text{非方阵 (由简入难)} \end{cases}$

假设 A 为可逆方阵, 则 $BA = A^{-1}(AB)A \therefore AB$ 与 BA 相似

① 可逆 $\Rightarrow$ 不可逆: 摄法

$A' = tI_n + A$ BA' 与 $A'B$ 相似

$$|\lambda I_n - A'B| = |\lambda I_n - BA'| \quad \det \text{ 为连续函数, 取 } t \rightarrow 0$$

$$\therefore |\lambda I_n - AB| = |\lambda I_n - BA|$$

(反右)

2. 已知方阵 A 的特征多项式为 $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$, 求

$$B = \begin{bmatrix} 7A & -4A & -4A \\ -4A & A & -8A \\ -4A & -7A & A \end{bmatrix} \text{ 的特征多项式和最小多项式.}$$

解: $A = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ 取 $P = \begin{pmatrix} P & & \\ & P & \\ & & P \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda-7 & 4 & 4 \\ 4 & \lambda-1 & 8 \\ 4 & 7 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-9)(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})$$

$$\therefore B = X \begin{pmatrix} 9A & & \\ & \sqrt{3}A & \\ & & -\sqrt{3}A \end{pmatrix} X^{-1}$$

$\therefore$ 特征多项式为 $P(\lambda) = \lambda^3(\lambda-9)(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})$

极小多项式为 ~~$m(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-9)(\lambda-18)(\lambda+\frac{17}{1}) (\lambda+\frac{34}{1})$~~

$m(\lambda) = \lambda(\lambda-9)(\lambda-18)(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+2\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})(\lambda+2\sqrt{3})$

反例:

当 $m=n$ 时, 取 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\text{rank}(BA) < \text{rank}(AB)$

$\therefore$ 不相似

$\rightarrow$ ② 方阵 $\Rightarrow$ 非方阵: 增广

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \quad CD = AB \quad DC = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\lambda I_m - CD| = |\lambda I_m - DC|$$

$$|\lambda I_m - AB| = |\lambda I_m - \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|$$

已知 J 是零特征值对应的四阶 Jordan 块, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} J & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

构造出使得相似变换 P , 使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(A) = 4 \quad \therefore \text{几何重数为 } 1, \text{ 特征向量 } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

特征值全为 0

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AP = PJ \quad P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$$

$$\therefore AP = (P_2, P_3, P_4, P_5, 0)$$

$$\begin{cases} AP_1 = P_2 \\ AP_2 = P_3 \\ AP_3 = P_4 \\ AP_4 = P_5 \\ AP_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{取 } P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即为所求

总结: ① 找出 Jordan 标准型

② 设 $AP = PJ$ 并拆分 (因为 J 形式很简单)

③ 求 P_i

4. 给定正整数 n . 若 A 是 n 阶上三角矩阵 (包括对角元) 都为 1 的 n 阶上三角矩阵, 求 A 的 Jordan 标准型.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \lambda_1 \sim \lambda_n = 1 \quad \text{rank}(I - A) = n - 1 \therefore n \text{ 个特征值为 } 1.$$

$$\therefore \text{Jordan 标准型为 } \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

2. 证明: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

证明: 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, A^T 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $AA^T = S$, $A^T A = N$

证明: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

证明: 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, A^T 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $AA^T = S$, $A^T A = N$

证明: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

$$I = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{其中 } I_r \text{ 是 } r \times r \text{ 单位阵}$$

由 I 的性质, 对任意 $A = A I$ 和 I 中非零元素 B ,

$$A B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B A$$

$$\text{若 } A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I = A + B$$

$$A B = B A$$

$$\text{若 } P A P^{-1} = I, P B P^{-1} = S$$

$$\therefore P A P^{-1} = P B P^{-1} + S = S + N$$

$$\text{故 } A = P(A + B)P^{-1}$$

$$= P A P^{-1} + P B P^{-1}$$

$$= S + N$$

$\therefore A, S$ 和 N 秩相等

证: 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, A^T 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $AA^T = S$, $A^T A = N$

$$\text{且 } N^2 = 0$$

例 (递推法) 求数列 $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ 的通项公式 $\alpha_0=1$, 递推关系为 $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n+4}{\alpha_n+3} (n \in \mathbb{N})$, 试求 $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ 的通项公式

数列递推:

$$\begin{cases} 5\alpha_{n+1}+2 = \frac{5(\alpha_n+3)}{\alpha_n+3} \\ \alpha_{n+1}-2 = \frac{\alpha_n-2}{\alpha_n+3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha_{n+1}+2}{\alpha_{n+1}-2} = 5 \frac{\alpha_n+2}{\alpha_n-2} \quad \text{又 } \frac{\alpha_0+2}{\alpha_0-2} = -3$$

$$\therefore \frac{\alpha_n+2}{\alpha_n-2} = -3 \cdot 5^n \quad \therefore \alpha_n = \frac{6 \cdot 5^n - 2}{3 \cdot 5^n + 1}$$

矩阵方法

设 $\alpha_n = \frac{x_n}{y_n}$ 则 $\alpha_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{3x_n+4y_n}{x_n+3y_n}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 5 & \\ & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

原 $\alpha_0 = \frac{x_0}{y_0} = 1, x_0 = y_0 = 1$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n - 2 \\ 5^n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5^n+1}{2} & 5^n-1 \\ \frac{5^n-1}{4} & \frac{5^n+1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha_n = \frac{2 \cdot 5^n + 2 + 4 \cdot 5^n - 4}{5^n + 1 + 2 \cdot 5^n + 2} = \frac{6 \cdot 5^n - 2}{3 \cdot 5^n + 1}$$

8. (进阶) 已知 k 是正整数, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 是 k 个互异的复数, 关于 x 的方程

$$x^k = \xi_1 x^{k-1} + \xi_2 x^{k-2} + \dots + \xi_{k-1} x + \xi_k$$

所有互不相同的复根是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, 其重数分别为 $m_1, m_2, \dots, m_k$, 那么存在一组常数 β_j , 使得线性递归数列

$$a_n = \xi_1 a_{n-1} + \xi_2 a_{n-2} + \dots + \xi_{k-1} a_{n-k+1} + \xi_k a_{n-k}$$

的通项公式可以表示为

$$a_n = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \beta_{ij} n^j \right) \lambda_i^n$$

$$F = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{k-1} & \xi_k \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

F 的特征方程为 $\det(\lambda I - F) = 0$
即上述方程。

特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

对应的代数重数为 $m_1, m_2, \dots, m_k$.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{k-1} & \xi_k \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} \leftarrow \text{线性递归数列}$$

$a_n \qquad \qquad \qquad a_{n-1}$

$$a_n = F a_{n-1} = F^n a_0 = P \begin{pmatrix} J_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_t^n \end{pmatrix} P^{-1} a_0. \quad \text{其中 } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \leftarrow \text{每个 } J_i \text{ 由 } m_i \text{ 个 } \lambda_i \text{ 组成}$$

$$\text{由 5. } F^n = (S + N)^n = S^n + C_n^1 S^{n-1} N + C_n^2 S^{n-2} N^2 + \dots + C_n^n N^n$$

$$\therefore P^{-1} a_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n \lambda_1^{n-1} & n^2 \lambda_1^{n-2} & \dots \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1} a_0 \quad \text{其中 } P^{-1} a_n \text{ 是 } a_n \text{ 的线性组合.}$$

$\therefore$ 可设 β_{ij} . (构成形式: ① 线性组合 ② C_n^k 中除 n^k 外的级数 $a_0, \dots, a_k$ 的级数)

$$\text{使 } a_n = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \beta_{ij} n^j \right) \lambda_i^n.$$

10

2. 若 n 是正整数, $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, 证明:

$$\|a-b\|_2^2 + \|b-c\|_2^2 + \|c-d\|_2^2 + \|d-a\|_2^2 \geq \|a-c\|_2^2 + \|b-d\|_2^2$$

平行四边形法则

$$\text{右式} = \frac{\|a+b-c-d\|_2^2 + \|a-b-c+d\|_2^2}{2}$$

等价于证明: $\|a+b-c-d\|_2^2 + \|a-b-c+d\|_2^2 \leq 2(\|d-a\|_2^2 + \|b-c\|_2^2) + 2(\|a-b\|_2^2 + \|c-d\|_2^2)$ ①

下面, 我们来证 $\|x+y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ②

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x-y\|^2 \geq 0 \text{ 恒成立, 对称性成立}$$

$$\therefore \|a+b-c-d\|_2^2 \leq 2(\|d-a\|_2^2 + \|b-c\|_2^2)$$

$$\|a-b-c+d\|_2^2 \leq 2(\|a-b\|_2^2 + \|c-d\|_2^2)$$

不对称性成立

$\therefore$ 原不等式成立, 得证

3. 设 V 是 n 维内积空间, 若 V 中向量 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 满足 $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ (即 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 是 V 的一组规范正交基), 则 V 中任意向量 x 可表示为 $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ (即 x 在 V 中的正交分解).

因为 x 是 V 中向量, $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$\langle x, v_i \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_i \rangle + \lambda_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_n, v_i \rangle = \lambda_i$$

令 $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ 对 V 作 QR 分解

$$V = QR$$

等价于把 V 这组基规范正交化

$$[v_1, v_2, \dots, v_n] = [q_1, q_2, \dots, q_n] R$$

$$v_1 = r_{11} q_1$$

$$v_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2$$

原因: V 与 Q 都满秩



由 Q 满秩

$q_1, q_2, \dots, q_n$ 是 V 的一组规范正交基, 且 R 满秩, 即 $r_{ii} \neq 0$

$\therefore x$ 是 V 中向量

$$\therefore x = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \dots + \lambda_n q_n$$

$$\langle x, v_1 \rangle = \langle x, r_{11} q_1 \rangle = \langle \lambda_1 q_1, r_{11} q_1 \rangle = 0 \quad \therefore \lambda_1 = 0$$

$$\langle x, v_2 \rangle = \langle \lambda_2 q_2, r_{22} q_2 \rangle = 0 \quad \therefore \lambda_2 = 0$$

类似归纳法:

$$1^\circ \lambda_1 = 0$$

$$2^\circ m \neq k \text{ 时 } \lambda_k = 0$$

$$3^\circ m = k+1 \text{ 时 } \langle x, v_{k+1} \rangle = \langle \lambda_{k+1} q_{k+1}, r_{k+1, k+1} q_{k+1} \rangle = 0 \quad \therefore \lambda_{k+1} = 0$$

$$\therefore \forall m, \lambda_m = 0$$

$$\therefore x = 0$$

4. 若 n 是正整数, $A \in C^{n \times n}$ 且 (i, j) 元素为 $a_{i,j}$, 证明 Hadamard 不等式

$$|\det(A)|^2 \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2$$

$$|\det(A)|^2 = \det(A) \det(\overline{A}^T) = \det(A) \det(A^*) = \det(AA^*)$$

对 A 作分块 $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ a_i 为行向量

$$\therefore \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 = \prod_{i=1}^n a_i \cdot a_i^*$$

$$\Leftrightarrow \text{证明: } \det(AA^*) \leq \prod_{i=1}^n a_i \cdot a_i^*$$

$$|AA^*| = \left| \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1^* \dots a_n^*] \right| = \begin{vmatrix} a_1 a_1^* & \dots & a_1 a_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1^* & \dots & a_n a_n^* \end{vmatrix}$$

其中 $A \cdot A^*$ 是 Hermitian 阵
且正定 (为度量阵)

$\Rightarrow$ 证明: 度量阵的行列式 $\leq$ 对角线乘积 (PS 可以看出取等条件为 $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ $i \neq j$)
用数学归纳法

1° 1 阶时, 显然 $G = G_{11}$

2° k 阶时, 设 $G \leq G_{11} \cdot G_{22} \dots G_{kk}$

3° $k+1$ 阶时, $G = \begin{bmatrix} G_k & \alpha \\ \alpha^* & G_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$

$$|G| = \begin{vmatrix} G_k & \alpha \\ \alpha^* & G_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_k & 0 \\ \alpha^* & G_{k+1,k+1} - \alpha^* G_k^{-1} \alpha \end{vmatrix} = G_k (G_{k+1,k+1} - \alpha^* G_k^{-1} \alpha)$$

$$\because G_k \text{ 正定} \therefore G_k^{-1} \text{ 正定} \therefore \alpha^* G_k^{-1} \alpha \geq 0$$

$$\therefore |G| \leq G_k \cdot G_{k+1,k+1} \leq \prod_{i=1}^{k+1} G_i$$

$\therefore \forall n$, 度量阵行列式 $\leq$ 对角线乘积

$$\therefore |AA^*| \leq \prod_{i=1}^n a_i a_i^*$$

$$\therefore |\det(A)|^2 \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \quad \text{Hadamard 不等式成立}$$

定义: 行列式的模长的平方 $\leq$ 诸向量的内积的乘积

从而算之 $\leq$ 分解算之再相乘

取等条件: $a_1 \dots a_n$ 两两正交, 即 A 中诸向量两两正交
(理解为互不干扰)

2. 证明: 若 T 是正规算子, 则 T 是正规算子 (性质)

$$\begin{aligned} \langle T(a+b), T(a+b) \rangle &= \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle = \langle Ta, Ta \rangle + \langle Ta, Tb \rangle + \langle Tb, Ta \rangle + \langle Tb, Tb \rangle \\ &= \langle Ta, Ta \rangle + \langle Tb, Tb \rangle + \langle Ta, Tb \rangle + \langle Tb, Ta \rangle \\ &= \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle \end{aligned}$$

$$\text{由 } \|a+b\|^2 = \|Ta+Tb\|^2 \Rightarrow \langle a+b, a+b \rangle = \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle$$

$$\langle a+b, a+b \rangle - \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle = 0$$

$$\langle a+b, a+b \rangle - \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle = 0$$

$$\langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle = \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle T(a+b), T(a+b) \rangle &= \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle = \lambda \langle a+b, a+b \rangle = \lambda \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle \\ &= \langle \lambda Ta+ \lambda Tb, Ta+Tb \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \lambda Ta+ \lambda Tb, Ta+Tb \rangle = 0$$

$$\langle \lambda Ta, Ta \rangle + \langle \lambda Tb, Tb \rangle = \lambda \langle Ta, Ta \rangle + \lambda \langle Tb, Tb \rangle$$

证: T 是正规算子

证: T 是正规算子

$$\langle T(a+b), T(a+b) \rangle = \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle$$

$$= \langle Ta, Ta \rangle + \langle Ta, Tb \rangle + \langle Tb, Ta \rangle + \langle Tb, Tb \rangle$$

$$= \langle Ta, Ta \rangle + \langle Tb, Tb \rangle + \langle Ta, Tb \rangle + \langle Tb, Ta \rangle$$

$$= \langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle = \langle T(a+b), T(a+b) \rangle$$

$$\langle Ta+Tb, Ta+Tb \rangle = \langle T(a+b), T(a+b) \rangle$$

6. (选做) 若 n 是大于 1 的正整数, 证明:

C^n 上的 1-范数和 ∞ -范数都不能由内积诱导

内积诱导的范数定义: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积
又要是内积 $\Rightarrow$ 一定满足内积的性质 $\Rightarrow$ 一定满足极化恒等式

1-范数: 反证法

假设 1-范数可由内积诱导。

$$\|x\|_1 = \sqrt{\langle x, x \rangle_1}$$

内积一定满足极化恒等式。

$$\langle x, y \rangle_1 = \frac{1}{4} (\|x+y\|_1^2 - \|x-y\|_1^2 + i\|x+iy\|_1^2 - i\|x-iy\|_1^2)$$

$$\text{不妨看实数域中, } \langle x, y \rangle_1 = \frac{1}{4} (\|x+y\|_1^2 - \|x-y\|_1^2)$$

若 x, y 不共线, 则加号不保

$$\text{取 } x = (1, 0, \dots, 0) \quad y = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\langle x, y \rangle_1 = \frac{1}{4} (9 - 1) = 2 \quad \langle 2x, y \rangle_1 = \frac{1}{4} (16 - 4) = 3 \neq 2 \langle x, y \rangle_1$$

$\therefore$ 不能由内积诱导。

不能由内积诱导回去, 不是内积了
一遍极化恒等式, 而应该用范数来算。

∞ -范数: 反证法

假设 $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x \rangle_\infty}$ 不妨看实数域

$$\langle x, y \rangle_\infty = \frac{1}{4} (\|x+y\|_\infty^2 - \|x-y\|_\infty^2)$$

$$\text{取 } x = (1, 0, \dots, 0), y = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\therefore \langle x, y \rangle_\infty = \frac{1}{4} (4 - 1) = \frac{3}{4} \quad \langle 2x, y \rangle_\infty = \frac{1}{4} (9 - 1) = 2 \neq 2 \langle x, y \rangle_\infty$$

$\therefore$ 不能由内积诱导

证明: 设 f, g 是 L^2 上的实函数, 证明: 若 f, g 是正交的, 则 $\langle f, g \rangle = 0$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda \quad (f, g \in L^2)$$

设 V 上的一个内积, 且是欧几里得内积, 则 $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$

$$\textcircled{1} \langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f^2(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda \geq 0$$

$$\text{若 } f=0, \text{ 则 } \langle f, f \rangle = 0$$

$$\textcircled{2} \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \text{ 是实数}$$

$$\textcircled{3} \langle f+g, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(f+g)g}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{fg}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda + \int_{-1}^1 \frac{g^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle$$

$$\textcircled{4} \langle af, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{afg}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = a \int_{-1}^1 \frac{fg}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda$$

$$= a \langle f, g \rangle$$

$\therefore$ 该内积是 L^2 上的一个内积

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = \int_{-1}^1 f(\lambda)g(\lambda) d\arcsin \lambda = \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} f(\sin x)g(\sin x) dx$$

$$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\cos(i \arcsin \lambda) \cos(j \arcsin \lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = \int_0^\pi \cos(ix) \cos(jx) dx = 0$$

$\therefore$ 两两正交

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, T_3 = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x$$

2023.11.13 Week 11

1. 若 n 是大于 1 的整数, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正交矩阵, $x+yi$ 是 Q 的某个虚特征值对应的特征向量, 其中 $x, y \in \mathbb{R}^n$. 证明: $y^T x = 0$ 且 $\|x\|_2 = \|y\|_2$.

设该虚特征值为 $a+bi$. 由于 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$Q(x+yi) = (a+bi)(x+yi) \quad \downarrow \quad \begin{cases} Qx = ax - by \\ Qy = (ay + bx)i \end{cases} \Rightarrow Q(x-yi) = (a-bi)(x-yi)$$

$\mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \lambda$ 与 $\bar{\lambda}$ 对应特征向量

$$\begin{aligned} (x+yi)^* Q^* &= (a-bi)(x+yi)^* \\ (x^T - y^T i) Q^* &= (a-bi)(x^T - y^T i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(x+yi) &= (a+bi)Q^*(x+yi) \Rightarrow Q^*(x+yi) = \frac{1}{a+bi}(x+yi) \\ (x-yi) &= (a-bi)Q^*(x-yi) \Rightarrow Q^*(x-yi) = \frac{1}{a-bi}(x-yi) \end{aligned}$$

正交矩阵条件
 $\downarrow$
 $a+bi$ 与 $a-bi$

$$\therefore (x^T - y^T i)Q^*(x+yi) = (a-bi)(x^T - y^T i)(x+yi) \quad \text{①+② 条件}$$

$$\frac{1}{a+bi}(x^T - y^T i)(x+yi) = (a-bi)(x^T - y^T i)(x+yi)$$

$$\therefore \text{① } (a-bi)^2 = 1 \text{ 或 ② } (x^T - y^T i)(x+yi) = 0$$

$$\text{① 若 } (a-bi)^2 = 1 \text{ 即 } (a^2 - b^2) - 2abi = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ 与虚特征值矛盾}$$

$$\therefore \text{② 一定成立. } x^T x - y^T y - 2x^T y i = 0 \quad \therefore \begin{cases} y^T x = 0 \\ \|x\|_2 = \|y\|_2 \end{cases} \text{ 得证}$$

PS: 证: Q 的另性质 酉矩阵性

$$Qz = \lambda z$$

$$\langle Qz, Qz \rangle = \lambda^2 \langle z, z \rangle = \langle z, z \rangle \therefore \lambda^2 = 1$$

$$\begin{cases} \|Qx\|_2 = \|x\|_2 \\ \|Qy\|_2 = \|y\|_2 \end{cases} \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

↑ 对称化

判定正交阵 \$Q\$ 以及所有复阵 \$A\$ 证明以下条件都与 \$AA^* = A^*A\$ 等价

(1) \$A\$ 可以表示为 \$A = X + iY\$ 其中 \$X\$ 和 \$Y\$ 是 Hermite 阵且 \$XY = YX\$

(2) \$A\$ 的实部和虚部都是 Hermite 阵, 其中 \$\lambda_1, \dots, \lambda_n\$ 是 \$A\$ 的特征值;

(3) 存在复数域上的多项式 \$f(\lambda)\$ 使得 \$A^* = f(A)\$

(4) \$A\$ 的所有特征值都是 \$A^*\$ 的特征值

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^H$$

$$A^* = (d_1 \dots d_n) \begin{pmatrix} \lambda_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^H \\ \vdots \\ d_n^H \end{pmatrix}$$

上式 **对称化** (A Hermite) $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i G_i$

① $A = QDQ^*, AA^* = QDQ^*Q^*DQ = QD^*DQ = A^*A$

② $AA^* = A^*A, A = QTQ^*$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

更确切地 \$T_{12} = 0\$

$$-TT^* = T^*T$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ 0 & T_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ 0 & T_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$T_{11}T_{22}^* + T_{12}T_{12}^* = T_{11}^*T_{11}$$

$$\text{tr}(T_{12}T_{12}^*) = \|T_{12}\|_F^2 = 0$$

$$T_{12} = 0$$

$$\therefore A = QDQ^* \text{ 可对称化}$$

证: $A = U\Sigma V^*$

$$AA^* = U\Sigma^2U^*$$

$$A^*A = V\Sigma^2V^*$$

$$\text{取 } U=V$$

$$\text{则 } A = U\Sigma U^*$$

可对称化

(1) $AA^* = A^*A \Rightarrow A = X + iY$. 构造 $X = \frac{A+A^*}{2}, Y = \frac{A-A^*}{2i}$ (用证 \$X, Y\$ Hermite)

$$XY = \frac{1}{4i} (A^2 - AA^* + A^*A - A^{*2}) = \frac{1}{4i} (A^2 + AA^* - A^*A - A^{*2}) = YX \quad \Rightarrow \text{成立}$$

$$A = X + iY \dots \Rightarrow AA^* = A^*A, AA^* = (X + iY)(X - iY) = X^2 + Y^2$$

$$A^*A = (X - iY)(X + iY) = X^2 + Y^2 \Rightarrow AA^* = A^*A \quad \Leftarrow \text{成立}$$

等价

(2) $AA^* = A^*A \Rightarrow \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$

$$A = Q\Sigma Q^*, \text{ 且 } i, j = \lambda_i \therefore \|A\|_F^2 = \|\Sigma\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \Rightarrow AA^* = A^*A$$

★ 用方法 1

Schur 分解 $A = Q^*TQ, \|T\|_F^2 = \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |t_{ii}|^2$

$$\therefore t_{ij} = 0 \therefore T \text{ 为对角阵} \therefore A = Q^*DQ, AA^* = A^*A$$

(3) $AA^* = A^*A \Rightarrow A^* = f(A), A = Q\Lambda Q^*, A^* = Q\Lambda^*Q^*, f(\Lambda) = \Sigma Q\Lambda^i, \text{ 若 } f(\Lambda^*) = f(\Lambda)^*$

Vandermonde 矩阵性质

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

\$a_i\$ 为多项式系数

$$A^* = Q\Lambda^*Q^* = Qf(\Lambda)Q^* = f(A)$$

3. 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

$$A = U \Sigma V^* \quad \begin{cases} A^* A = V \Sigma^* \Sigma V^* \\ A A^* = U \Sigma \Sigma^* U^* \end{cases}$$

$$A^* A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{取 } V^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad V^* A^* A V = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \Sigma^* \Sigma \quad \therefore \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A v_1 = \sqrt{6} u_1 \quad A v_2 = \sqrt{2} u_2 \quad A v_3 = 0 u_3 \quad \therefore U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$A A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad U^* A A^* U = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore U^* = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{因为这里两个6, 对应不清晰, 所以要用 } A v_k = u_k \sigma_k \text{ 的方式求 } u_k.$$

$$\therefore \text{奇异值分解为} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{并且这样也更简单}$$

$$A^* = f(A) \Rightarrow A A^* = A^* A \quad A A^* = A f(A) = f(A) A = A^* A$$

$$(4) A A^* = A^* A \Rightarrow A, A^* \text{ 有共同特征向量}$$

$$\text{正规矩阵} \Rightarrow \text{酉对角化} \therefore A = Q \Lambda Q^* \quad A Q = Q \Lambda \quad \text{因为特征向量是张成的基}$$

$$A^* = Q \Lambda^* Q^* \quad A^* Q = Q \Lambda^* \quad \text{span}(Q) \text{ 为特征向量的张成}$$

$\therefore A$ 的特征向量即是 A^* 的特征向量

$$\text{特征向量} \Rightarrow A A^* = A^* A$$

$$\forall x \quad A x = \lambda x \quad A^* x = \sigma x$$

$$\begin{cases} A A^* x = \sigma A x = \sigma \lambda x \\ A^* A x = \lambda A^* x = \sigma \lambda x \end{cases} \Rightarrow A A^* x = A^* A x$$

特征向量
x 不一定张成全空间

由于 x 的任意性, 为特征空间之基 $\therefore A A^* = A^* A$ 见后面证明

$$A x = \lambda x \quad x^* A x = \lambda x^* x \quad \therefore \lambda = \bar{\lambda}$$

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 其中 $n \geq 2$ 举例说明下列情况可能发生: (构造性的证明)

(a) $(AB)^{\dagger} \neq B^{\dagger}A^{\dagger}$

(b) $(A^k)^{\dagger} \neq (A^{\dagger})^k$ 其中 k 是正整数

(c) $A^{\dagger}$ 的特征值的倒数不是 A 的特征值

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (AB)^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad B^{\dagger}A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \neq AB$

(PS: $AB^{\dagger} \neq A^{\dagger}B$ 也是成立的) 貌似没啥直观感觉, 就直接猜

(b) 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^k = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore (A^k)^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (A^{\dagger})^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore (A^k)^{\dagger} \neq (A^{\dagger})^k$

(PS: 验证 $A^k = A$ 是成立的)

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$

$\downarrow$ 不为 1 的数 $\therefore$ 可能发生

$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 0$

2. (4) A 的 Schur 分解: $A = Q \nabla Q^*$

$A^* = Q \Delta Q^*$

Q 的第一列是 A, A^* 的特征向量

$\therefore A^*Q = Q \nabla$

$\uparrow$ 第一列非对角元为 0

让非对角元为 0

$\therefore A = Q \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \dots & * \end{bmatrix} Q^*$

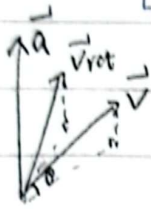
$\therefore Q$ 的第二列是特征向量 $\leftarrow$

以此类推: $A = Q \Lambda Q^*$

即得 $AA^* = A^*A$

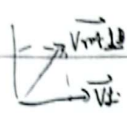
5. 若 $a = [a_1, a_2, a_3]^T$ 是 R^3 中的单位向量, 证明 绕 a 逆时针旋转 θ 的旋转变换的表示矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} a_1^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & a_1a_2(1-\cos\theta) - a_3\sin\theta & a_1a_3(1-\cos\theta) + a_2\sin\theta \\ a_1a_2(1-\cos\theta) + a_3\sin\theta & a_2^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & a_2a_3(1-\cos\theta) - a_1\sin\theta \\ a_1a_3(1-\cos\theta) - a_2\sin\theta & a_2a_3(1-\cos\theta) + a_1\sin\theta & a_3^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}$$



旋转 θ 后, $V_{\parallel}$ 不变, $V_{\perp}$ 变.

$$\begin{cases} V_{\parallel} = \langle \vec{a}, \vec{V} \rangle \cdot \vec{a} \\ V_{\perp} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{V} - \langle \vec{a}, \vec{V} \rangle \cdot \vec{a} = -\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{V}) \end{cases}$$



$$\begin{cases} V_{\text{rot}\parallel} = V_{\parallel} = \langle \vec{a}, \vec{V} \rangle \cdot \vec{a} \\ V_{\text{rot}\perp} = V_{\perp} \cos\theta + \vec{a} \times \vec{V} \sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \vec{V}_{\text{rot}} = V_{\parallel} + (V_{\perp} - V_{\text{rot}\perp}) \cos\theta + \vec{a} \times \vec{V} \sin\theta$$

$$= \cos\theta \cdot \vec{V} + (1 - \cos\theta) V_{\parallel} + \vec{a} \times \vec{V} \sin\theta$$

$$= \vec{V} + (1 - \cos\theta) [V_{\parallel} - \vec{V}] + \vec{a} \times \vec{V} \sin\theta$$

$$= \vec{V} + (1 - \cos\theta) \cdot \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{V}) + \vec{a} \times \vec{V} \sin\theta$$

用叉积表示叉乘形式,
所以可用矩阵表示

用叉乘矩阵形式. $\vec{a} \times \vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \vec{V} \quad R^2 = \begin{bmatrix} -a_3^2 a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & -a_1^2 a_3^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & -a_1^2 a_2^2 \end{bmatrix}$

$$\therefore Q = I + (1 - \cos\theta) R^2 + R \sin\theta$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + (1 - \cos\theta)(a_1^2 - 1) & (1 - \cos\theta)a_1a_2 - a_3\sin\theta & a_1a_3(1 - \cos\theta) + a_2\sin\theta \\ a_1a_2(1 - \cos\theta) + a_3\sin\theta & 1 + (1 - \cos\theta)(a_2^2 - 1) & a_2a_3(1 - \cos\theta) - a_1\sin\theta \\ a_1a_3(1 - \cos\theta) - a_2\sin\theta & a_2a_3(1 - \cos\theta) + a_1\sin\theta & 1 + (1 - \cos\theta)(a_3^2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^2(1 - \cos\theta) + \cos\theta & a_1a_2(1 - \cos\theta) - a_3\sin\theta & a_1a_3(1 - \cos\theta) + a_2\sin\theta \\ a_1a_2(1 - \cos\theta) + a_3\sin\theta & a_2^2(1 - \cos\theta) + \cos\theta & a_2a_3(1 - \cos\theta) - a_1\sin\theta \\ a_1a_3(1 - \cos\theta) - a_2\sin\theta & a_2a_3(1 - \cos\theta) + a_1\sin\theta & a_3^2(1 - \cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}$$

ps: 叉乘, 结论是显然的 $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

9 Li 11/20

① 叉乘矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1y - a_2z \\ a_3x - a_1z \\ a_1y - a_2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

② 三叉积展开 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ $\uparrow$ R 矩阵表示形式

其中 $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1$

若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且 $A^T = A$ ，则 A 为实对称阵。

定义 $W(A) = \left\{ \frac{x^* A x}{x^* x} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ 是 A 的特征值的集合。

$$A^T = A, A^{**} = A$$

$$A \text{ 是实阵} \Rightarrow A^* = \bar{A}^T = A^T = A$$

$$A^* A = A A^* = I, A^{**} A = A A^{**} = I$$

$\therefore A = Q \Lambda Q^*$ 其中 Λ 为实对角阵 (但并非实对称阵) 实 $-A^H = A$

$\therefore A$ 是正规阵

$\therefore A = Q \Lambda Q^*, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为 A 的特征值 $I - A A^H = I$

$\therefore A Q = Q \Lambda, Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ 为特征向量 (互正交归一化)

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, x = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n = [q_1 \dots q_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = Q \alpha \quad (\text{其中 } \alpha \in \mathbb{R}^n)$$

$$\frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{\alpha^* Q^* Q \Lambda Q^* Q \alpha}{\alpha^* Q^* Q \alpha} = \frac{\alpha^* \Lambda \alpha}{\alpha^* \alpha} = \frac{[\alpha_1 \dots \alpha_n]^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} [\alpha_1 \dots \alpha_n]}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

$$= \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \lambda_1 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \lambda_2 + \dots + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \lambda_n$$

$$= \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \dots + \beta_n \lambda_n \quad \text{其中 } \beta_i \in [0, 1] \text{ 且 } \sum \beta_i = 1$$

$\therefore W(A) = \{ \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \dots + \beta_n \lambda_n, \text{ 其中 } \beta_i \in [0, 1], \sum \beta_i = 1 \}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 $W(A)$ 的顶点

$$\forall x, y \in W(A), x = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n, y = \beta_1 q_1 + \dots + \beta_n q_n$$

$$\forall \alpha \in [0, 1], \alpha x + (1-\alpha)y = [\alpha \alpha_1 + (1-\alpha)\beta_1] q_1 + \dots + [\alpha \alpha_n + (1-\alpha)\beta_n] q_n \in W(A)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n \beta_i = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

$\therefore W(A)$ 是凸集 且顶点为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (特征值)

$$\therefore W(A) \subseteq \text{conv} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} = \text{conv} \{ | \lambda_i | \}$$

故 $W(A)$ 有界

$$-\max | \lambda_i | \leq W(A) \leq \max | \lambda_i | \quad \text{两端均可取到, } \beta_i = \delta_i, \text{ 其他 } \beta_i = 0$$

$\therefore W(A)$ 为闭集

$\therefore W(A)$ 为紧集

由 Krein-Milman 定理: 非空有界闭凸集是其所有顶点的凸包

$\therefore W(A)$ 是特征值的凸包

(PS: 用数归可证 Krein-Milman 定理成立)

2. 若 n 是正整数, 给定实对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 在由 n 阶实对称半正定矩阵的全体构成的闭凸锥

$$S_+^n = \{X = CC^T : C \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$$

中 $\uparrow$ Frobenius 范数
 $\downarrow$ 比 A 多的限制条件

又下离 A 最近的矩阵 (即找一个 $B \in S_+^n$ 使得 $\|A - B\|_F$ 最小)

$\therefore A$ 是实对称矩阵 (实对称阵有实特征值)

$$\therefore A = Q\Lambda Q^T, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ 不妨令 } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \lambda_1, \dots, \lambda_r < 0, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n > 0$$

$$\|A - B\|_F = \|Q\Lambda Q^T - B\|_F = \|\Lambda - Q^T B Q\|_F \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \alpha_{ii})^2}$$

取等条件成立 $\Leftrightarrow Q^T B Q = D$ (D 为 diag 阵, $D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$)

$$\text{设 } D = Q^T B Q \therefore D = Q^T C C^T Q = (C^T Q)^T (C^T Q) \in S_+^n \therefore D \text{ 是实对称半正定}$$

$$\therefore \alpha_{ii} \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \alpha_{ii})^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2} \quad \text{取等条件成立} \Leftrightarrow \alpha_{ii} (i=1:r) = 0, \alpha_{ii} (i=r+1:n) = \lambda_i$$

$$\therefore \text{当 } D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0_{r \times r} \\ & & & \lambda_{r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{且 } B = Q D Q^T \text{ 时, (其中 } Q \text{ 为 } A = Q\Lambda Q^T \text{)}$$

$$\|A - B\|_F \text{ 最小为 } \sqrt{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2}$$

3. 若 n 是正整数, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

证明: $\det(e^{A+B}) = \det(e^A) \det(e^B)$

举例说明当 $n > 1$ 时, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ 一般不成立.

$$\begin{bmatrix} e^A & \\ & e^B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} e^A & \\ I & e^B \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} e^A - e^{A+B} & \\ I & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -e^{A+B} \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \det(e^{A+B}) = \det(e^A) \det(e^B)$

当 $n=2$ 时, 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ $A+B = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \exp(A+B) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \exp(A) = \begin{bmatrix} e & \\ & e \end{bmatrix} \quad \exp(B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{e} & -e \\ & \frac{1}{e} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \exp(A) \cdot \exp(B) = \begin{bmatrix} 1 & -e^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \exp(A+B)$$

当 $n > 2$ 时, 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ $A+B = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$$\exp(A+B) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \exp(A) = \begin{bmatrix} e & & \\ & \ddots & \\ & & e \end{bmatrix} \quad \exp(B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{e} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{e} \end{bmatrix}$$

$$\exp(A) \cdot \exp(B) \neq \exp(A+B)$$

$\therefore$ 一般不成立.

Lemma: $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$

证明: $\det(e^A) = \det(P^{-1}e^JP) = \det(e^J) = e^{\text{tr}(J)} = e^{\text{tr}(A)}$

$$\therefore \det(e^{A+B}) = e^{\text{tr}(A+B)} = e^{\text{tr}(A)} \cdot e^{\text{tr}(B)} = \det(e^A) \cdot \det(e^B)$$

ps: $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ $\det(f(A)) = f(\text{tr}(A))$ 矩阵的迹

4. 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 证明:

$\forall t \in \mathbb{R}$, 有

$$\exp(t(A+E)) = \exp(tA) + \int_0^t \exp((t-s)A) E \exp(s(A+E)) ds$$

$$\text{令 } X(t) = e^{t(A+E)}$$

$$\therefore X'(t) = (A+E)e^{t(A+E)} = A \cdot e^{t(A+E)} + E \cdot e^{t(A+E)}$$

$$\text{令 } B=E, U(t)=e^{t(A+E)}=X(t)$$

$$\therefore X'(t) = AX(t) + BU(t)$$

两边同乘 e^{-tA}

$$e^{-tA} X'(t) - e^{-tA} A X(t) = e^{-tA} B \cdot U(t)$$

$$(e^{-tA} X(t))' = e^{-tA} B \cdot U(t)$$

$$\int_0^t (e^{-sA} X(s))' ds = \int_0^t e^{-sA} B U(s) ds$$

$$e^{-tA} X(t) - X(0) = \int_0^t e^{-sA} B U(s) ds$$

$$\therefore X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} B U(s) ds$$

将 $X(t) = e^{t(A+E)} = U(t)$ 代入, $X(0) = I$, 将 B 代入

$$\therefore \exp(t(A+E)) = \exp(tA) + \int_0^t \exp((t-s)A) E \exp(s(A+E)) ds$$

很明显, 用 LTI 系统可做.

1. 证明 $f(x)$ 在凸集 C 上的最大值一定在 C 的某个极点上取得。

$\max_{x \in C} f(x)$ 其中 $x \in \mathbb{R}^n, d \in [0, 1]$
 $f(dx + (1-d)y) \leq df(x) + (1-d)f(y)$
 凸函数定义

2. 证明: 凸集 C 上的最大值一定在 C 的某个极点上取得。

设 C 为凸集, $C = \sum_{i=1}^k w_i P_i$, 其中 P_i 为排列阵, $\sum_{i=1}^k w_i = 1, w_i \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 f(w_1 P_1 + (1-w_1) \cdot \frac{1}{(1-w_1)} (w_2 P_2 + \dots + w_k P_k)) &\leq w_1 f(P_1) + (1-w_1) f\left(\frac{w_2 P_2 + \dots + w_k P_k}{1-w_1}\right) \\
 &\leq w_1 f(P_1) + w_2 f(P_2) + (1-w_1)(1-w_2) f\left(\frac{w_3 P_3 + \dots + w_k P_k}{(1-w_1)(1-w_2)}\right) \\
 &\leq \dots \leq w_1 f(P_1) + w_2 f(P_2) + \dots + w_k f(P_k)
 \end{aligned}$$

$\max [f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_k)] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} = Q, \quad e^T W = 1, \quad W \geq 0$
 线性规划求 max 值在顶点处取得
 $\leq \max \{f(P_i), -f(P_i)\}$

此时 $|w_i| = 1, f(Q) = \max \{f(P_i), -f(P_i)\}$

$\therefore f$ 的最大值一定在某个排列阵上取得

另一思路

PS=逻辑链: 凸集上凸函数有 max — 原因 $\left\{ \begin{array}{l} f(Q) \text{ 闭集} \rightarrow \text{有 max, min} \\ \rightarrow \text{min 在极点上} \\ \rightarrow \text{max 在边界上} \end{array} \right.$
 $\downarrow$
 max 在顶点上
 $\downarrow$
 双随机是 P_i 凸集, 且 P_i 为顶点
 $\downarrow$
 max 在 P_i 上取得

6. (选作) 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 且对任何 $t \in [0, +\infty)$ 都有 $\exp(tA) \geq 0$

证明: A 的所有非对角元都非负.

提问: 这道题怎么做呀 QAQ

泰勒展开式 $t \rightarrow 0$

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{6}A^3 + \dots \geq 0$$

$$\therefore t(A + \frac{t}{2}A^2 + \dots) \geq -I$$

$$t \rightarrow 0^+ \quad (0+)$$

$\therefore A$ 的非对角元非负

7. (续做) 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $A > 0$, $a_{ij}^{(m)}$ 表示 A^m 的 (i, j) 分量,

证明: $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_{ij}^{(m)}} = \rho(A)$

$$\because A > 0$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^m = q_1 q_2^* \quad (\text{其中 } q_1 \text{ 为右特征向量, } q_2 \text{ 为左特征向量, } q_1, q_2)$$

$$\because q_1 > 0, q_2^* > 0$$

$$\therefore q_1 q_2^* > 0$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{q_1 q_2^*} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^m} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{A^m} = \begin{pmatrix} \rho(A) & \cdots & \rho(A) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho(A) & \cdots & \rho(A) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_{ij}^{(m)}} = \rho(A)$$

8. (选做) 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是双随机矩阵, $x \in \mathbb{R}^n$ 是概率向量, 且 $y = Ax$.

证明: $\prod_{j=1}^n y_j \geq \prod_{j=1}^n x_j$, 这里 x_j, y_j 分别表示 x 和 y 的第 j 个分量.

$$\text{令 } X = \text{diag}(x) \quad Y = \text{diag}(y)$$

$$\therefore Y = AX = \sum_{i=1}^n w_i P_i X P_i \quad a \circ b \rightarrow a \quad b \rightarrow b \quad a$$

$$\prod_{j=1}^n y_j = \det(Y) = \left| \sum_{i=1}^n w_i P_i X P_i \right| \geq \sum_{i=1}^n w_i |P_i X| = \sum_{i=1}^n w_i |X|$$

$$> |X| = \prod_{j=1}^n x_j$$

$$\therefore \prod_{j=1}^n y_j \geq \prod_{j=1}^n x_j$$

9

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln y_i \geq \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$\therefore \ln y_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \ln x_j$$

Jensen's Inequality

$$\therefore \sum_{i=1}^n \ln y_i \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \ln x_j = \sum_{j=1}^n \ln x_j$$

2023/10/23 Week 8

1. 设 n 为正整数, A 是 n 阶方阵

$$\text{证明: } \text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$$

将 A 化为 Jordan 标准型 $J = P^{-1}AP$

$$\therefore A^n = PJ^nP^{-1} \quad A^{n+1} = PJ^{n+1}P^{-1}$$

$$\text{rank}(A^n) = \text{rank}(PJ^nP^{-1}) = \text{rank}(J^n)$$

$$\text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(PJ^{n+1}P^{-1}) = \text{rank}(J^{n+1})$$

$$\therefore \text{原证明等价于证 } \text{rank}(J^n) = \text{rank}(J^{n+1})$$

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & & \\ & J_2^n & \\ & & \ddots \\ & & & J_n^n \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{对于每一个 } J_i, \text{ 进行分解 } J_i = \lambda_i I + N$$

$$\therefore J_i^n = \lambda_i^n I + C_n^1 \lambda_i^{n-1} N + \dots \quad \begin{bmatrix} \lambda_i^n & C_n^1 \lambda_i^{n-1} & \dots \\ & \lambda_i^n & \dots \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_i^n \end{bmatrix}$$

$$(n+1) \geq \text{rank } J_i$$

$$J_i^{n+1} = \lambda_i^{n+1} I + C_{n+1}^1 \lambda_i^n N + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^{n+1} & C_{n+1}^1 \lambda_i^n & \dots \\ & \lambda_i^{n+1} & \dots \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_i^{n+1} \end{bmatrix}$$

rank 相等, 即 $\text{rank}(J_i)$

$$\therefore \text{rank}(J_i^n) = \text{rank}(J_i^{n+1})$$

$$\therefore \text{rank}(J^n) = \text{rank}(J^{n+1})$$

2. 若 J 是关于特征值 1 的 3 阶 Jordan 块, 求关于 X 的矩阵方程 $X^2 = J$ 的一个解.

法一:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{设 } X = P(J_0)P^{-1} \quad \therefore X^2 = P J_0^2 P^{-1} = J$$

$$J_0 = \lambda I + N$$

$$\therefore J_0^2 = \lambda^2 I + 2\lambda N + N^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

即 $J_0^2 \sim J$ 相似

特征值 $\lambda^2 = 1$

不妨取 $\lambda = 1$. $J_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = J$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = P J_0 P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

法二: 如果可以直接设 $X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 那就好了.

解得 $a = c = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{8}$

3. 证明: 任何复方阵都可以分解成两个复对称阵的乘积, 并且可以要求其中的一个因子为非奇异矩阵. 常用定理

举例说明复方阵未必可以分解成两个 Hermite 矩阵的乘积.

→ 扩展为证

A 可化为 Jordan 标准型, 即 $P^{-1}AP = J = [J_1 \dots J_n]$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

反转矩阵 (转置对称)
 两个对称阵
 假设为 T_i 假设为 I_i'

$$\therefore J = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & T_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 0_{m \times m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1' & & \\ & I_2' & \\ & & \ddots \\ & & & I_m \end{pmatrix}$$

↑ 奇异
↑ 满秩

T : 反转矩阵 $\therefore T = T^{-1}$
 $J = ST \Rightarrow S = J \cdot T^{-1}$
 $S = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

$$\therefore A = (P^{-1} T P^{-1}) (P^{-1} I' P^{-1}) = BC$$

其中 $B^T = B$, $C^T = C$, $\det(C) \neq 0$.

取 $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ & 1+i \end{pmatrix} = AB$. $A = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & b \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} e & \bar{g} \\ g & f \end{pmatrix}$, $a, b, e, f \in \mathbb{R}$
 $c, g \in \mathbb{C}$.

$$AB = \begin{pmatrix} ae + \bar{c}g & * \\ * & c\bar{g} + bf \end{pmatrix}$$

$$ae + \bar{c}g = c\bar{g} + bf$$

$$ae + i\bar{c}g = \bar{c}g + bf$$

$\therefore \bar{c}g = c\bar{g} \rightarrow$ 虚部都等于 0
 $\text{且 } i = -i \text{ 矛盾}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ & 1+i \end{pmatrix}$ 不可以分解成两个 Hermite 矩阵乘积.

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

利用圆盘定理证明A的特征值的实部都严格大于零。

对A作相似变换，A的特征值不变。

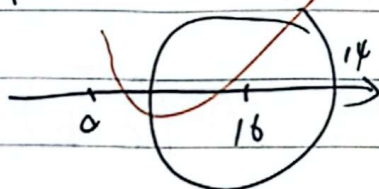
$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & \frac{32}{3} & 6 \\ 6 & 16 & 8 \\ 6 & 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

根据圆盘定理

$$|\lambda_i - 16| < \max \left\{ \frac{32}{3}, 12, 14, 8 \right\} = 14$$

$$\therefore \forall i, |\lambda_i - 16| < 14$$



$\therefore \lambda_i$ 的实部都大于零

5. 法二：课本类似方法 A 形状特殊故

$$A \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_n + p_2 \\ p_1 + p_3 \\ \vdots \\ p_{n-2} + p_n \\ p_{n-1} + p_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}$$

可将特征向量具体化出来求解

$$p_n = C_1(M_1)^n + C_2(M_2)^n$$

将代入求的条件

$$C_1 + C_2 = C_1(M_1)^n + C_2(M_2)^n$$

$$C_1 M_1 + C_2 M_2 = C_1(M_1)^{n+1} + C_2(M_2)^{n+1}$$

$$(M_1)^n = (M_2)^n = 1$$

$$M_1 = e^{\frac{2\pi k i}{n}} \quad M_2 = e^{\frac{2\pi l i}{n}}$$

$$\lambda = e^{\frac{2\pi k i}{n}} + e^{\frac{2\pi l i}{n}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

$$\lambda = e^{\frac{2\pi k i}{n}} + e^{\frac{2\pi l i}{n}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

$$\lambda = e^{\frac{2\pi k i}{n}} + e^{\frac{2\pi l i}{n}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

$$\lambda = e^{\frac{2\pi k i}{n}} + e^{\frac{2\pi l i}{n}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

$$\lambda = e^{\frac{2\pi k i}{n}} + e^{\frac{2\pi l i}{n}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

$$\lambda = e^{\frac{2\pi k i}{n}} + e^{\frac{2\pi l i}{n}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

计算特征向量：(特征向量可求，不独P列)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ p_n = p_0 = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow p_1 = C_1 M_1 + C_2 M_2 = C_1 M_1 + (1 - C_1) M_2$$

$$\rightarrow p_2 = \lambda p_1 - p_0$$

$$\rightarrow p_n = \lambda p_{n-2} - p_{n-3}$$

$$\therefore \text{分别代入每个 } \lambda \text{ 和对应的 } M_1, M_2 \text{ 即可}$$

$$\text{构造出对应的特征向量。}$$

$$\text{构造出对应的特征向量。}$$

$$\text{构造出对应的特征向量。}$$

$$\text{构造出对应的特征向量。}$$

$$\text{构造出对应的特征向量。}$$

$$\text{构造出对应的特征向量。}$$

$$\text{构造出对应的特征向量。}$$

$$\text{构造出对应的特征向量。}$$

5. 给定正整数 n , 求 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

的所有特征值和特征向量

法一: 设 A 为给定方阵. A 是循环矩阵 (每乘一个了就往左移一下)

背景知识: 循环矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & & & \\ \vdots & & & \\ a_2 & & & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$$

令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 1 的 n 次方根.

$$\text{令 } V = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \varepsilon_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_1^{n-1} & & & \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & & \\ & f(\varepsilon_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & & & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & & & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & & & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = V\Lambda \quad \therefore |A||V| = |V||\Lambda|$$

$$\therefore |A| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n)$$

ps: 关于 1 的 n 次方根 $e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \therefore e^{2\pi ki} = 1$

$$\therefore \varepsilon_k = e^{2\pi \frac{k}{n}i} = \cos 2\pi \frac{k}{n} + i \sin 2\pi \frac{k}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

解: 题中 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad a_1 = \lambda, a_2 = a_n = -1$

$$\therefore f(x) = \lambda - x - x^{n-1}$$

$$\text{(其中 } \varepsilon_i + \varepsilon_i^{n-1} = \cos 2\pi \frac{k}{n} + i \sin 2\pi \frac{k}{n} + \cos 2\pi \frac{k}{n} - i \sin 2\pi \frac{k}{n} = 2 \cos 2\pi \frac{k}{n})$$

$$\therefore \det(\lambda I - A) = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n) = 0$$

$$\therefore \text{特征值为 } 2 \cos 2\pi \frac{k}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

$$AV = V\Lambda \quad (V \text{ 即为特征向量}) \quad \text{对于 } A, f(x) = x + x^{n-1} \quad \therefore \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos 2\pi \frac{0}{n} & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \cos 2\pi \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\text{对应的特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_2^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_n \\ \vdots \\ \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{特征值 } \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 2 \cos \frac{2\pi}{n} \quad \dots \quad \lambda_n = 2 \cos \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

6. (选做) 设

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}$$

证明: 与 F 乘法可交换的矩阵一定是 F 的多项式

提问助教老师, 这题该怎么做呀? o.o 谢谢

<< 高等代数 >> 白皮书 (第三版) (3) 7.22

将 F 换种写法 $F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ & \ddots & 0 & -a_{n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$ 用基坐标换 [查来证明].

令 φ 在基 $e_1, \dots, e_n$ 下的表示矩阵为 F .

$$\mathbb{R} \varphi(e_1) = e_2 \quad \varphi(e_2) = e_3 \cdots \varphi(e_{n-1}) = e_n, \quad \varphi(e_n) = -a_n e_1 - a_{n-1} e_2 - \cdots - a_1 e_n$$

与 φ 可交换的为 ψ . 设 $\psi(e_i) = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$

$$\varphi \psi = \psi \varphi$$

$$\therefore \varphi(b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_n e_n) = \psi(e_2)$$

$$= b_1 \varphi(e_1) + \cdots + b_n \varphi(e_n)$$

$$= b_1 e_2 + b_2 \varphi(e_2) + \cdots + b_n \varphi^{n-1}(e_2)$$

$$\text{同理} \quad \psi(e_i) = b_1 e_i + b_2 \varphi(e_i) + \cdots + b_n \varphi^{n-1}(e_i)$$

$$\therefore \psi = b_1 I + b_2 \varphi + \cdots + b_n \varphi^{n-1}$$

可交换的一定是 F 的多项式

7. (选做) 证明: 任何实方阵都可以分解成两个实对称矩阵的乘积, 并且可以要求其中的一个因子为非奇异矩阵.

实对称阵中, 所有复特征值都成对出现. $\begin{bmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$ 这样的块.

可以写成 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ 记为 M . 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

$\therefore A$ 可以化为类 Jordan 标准型

$$A = P^{-1}JP$$

$$\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_n \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

对于 J_i . 若为实数特征值, 则与 J_i 样不再赘述

若为复特征值, 则成对出现, 可写成 $\begin{bmatrix} M & I \\ & M \\ & & \ddots \\ & & & M \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} I & M \\ & I \\ & & \ddots \\ & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ & I \\ & & \ddots \\ & & & I \end{bmatrix} \quad \text{实对称}$$

$$\therefore J = \begin{bmatrix} M_{1\mathbb{R}} & & \\ & M_{2\mathbb{R}} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\mathbb{R}} & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathbb{R}} & & \\ & I_{2\mathbb{R}} & \\ & & \ddots \\ & & & I_{\mathbb{R}} & \\ & & & & I_{2\mathbb{R}} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & I_m \end{bmatrix}$$

B $\uparrow$ 块 C

均为实对称

$$\therefore A = (P^{-1}BP)(P^{-1}CP) \quad \text{得证.}$$

ps: 补充, 为什么复数可以写成矩阵形式. (u, v 为线性无关组)

$$\begin{cases} A(u+iv) = \lambda(u+iv) = (a+bi)(u+iv) \\ A(u-iv) = \bar{\lambda}(u-iv) = (a-bi)(u-iv) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Au = au - bv \\ Av = av + bu \end{cases}$$

$$\therefore A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

10 非常好! Li 10/30

Week 12 11.20

本课程默认矩阵

奇异值降序排列 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$

Hermite 阵特征值升序排列 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

1. 已知 n 和 k 是正整数, 对于固定的 n . 若 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两两夹角为钝角的向量, 问: k 最大可以达到多少?

Step 1: 先进行猜测

1-2

2-3

3-4

故 k 最大可以达到 $n+1$ 。

Step 2: 举例证 $n+1$ 个可以。

$$v_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$v_2 = (-1, 2, 0, \dots, 0)$$

$$v_3 = (-1, -2, 2^2, \dots, 0)$$

$$v_4 = (-1, -2, -2^2, 2^3, \dots, 0)$$

$\vdots$

$$v_n = (-1, -2, \dots, -2^{n-2}, 2^{n-1})$$

$$v_{n+1} = (-1, -2, \dots, -2^{n-1})$$

此时 $v_1, \dots, v_{n+1}$ 两两夹角为钝角。

$$\langle v_i, v_j \rangle < 0$$

Step 3: 反证法证 $n+2$ 个不可以 (核心思维: 将线性组合为 0 的进行拆分)

假设有 $n+2$ 个两两夹角为钝角的向量 $v_1, v_2, \dots, v_{n+2}$

(不全为 0)

则 $\exists c_1, \dots, c_{n+1}$, 使 $c_1 v_1 + \dots + c_{n+1} v_{n+1} = 0$

★ 其中 $c_{i_1}, \dots, c_{i_l} = 0$ $c_{j_1}, \dots, c_{j_{l_2}} > 0$. 剩下的 $c_{k_1}, \dots, c_{k_{l_3}} < 0$ ($l+l_2+l_3=n+1$)

对线性组合进行拆分, 分别运用①内积线性性质②两两钝角这条件, 证矛盾。

$$\text{因此, } c_{j_1} v_{j_1} + \dots + c_{j_{l_2}} v_{j_{l_2}} = -c_{k_1} v_{k_1} - \dots - c_{k_{l_3}} v_{k_{l_3}} = a$$

$$\star \langle a, a \rangle = \langle c_{j_1} v_{j_1} + \dots + c_{j_{l_2}} v_{j_{l_2}}, -c_{k_1} v_{k_1} - \dots - c_{k_{l_3}} v_{k_{l_3}} \rangle$$

$$= -c_{j_1} c_{k_1} v_{j_1}^T v_{k_1} - \dots < 0$$

与 $\langle a, a \rangle \geq 0$ 矛盾

因此两两夹角为钝角的向量个数 $\leq n+1$

综上, k 最大可以达到 $n+1$ 。

2. 若 m, n 是正整数, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 求

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}} \frac{y^T A x}{\|x\|_2 \|y\|_2}$$

和 $\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}} \frac{|y^T A x|}{\|x\|_2 \|y\|_2}$

$$\therefore A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\therefore A = U^T \Sigma V \quad (\text{本应 } U \Sigma V^T, \text{ 这里不妨反着取一下})$$

$$\text{上式} = (Uy)^T \Sigma (Vx)$$

$$\text{下式} = \|x\|_2 \|y\|_2 = \|Vx\|_2 \|Uy\|_2$$

$$\therefore \text{令 } \tilde{x} = Vx \quad \tilde{y} = Uy$$

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}} \frac{y^T A x}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \min_{\substack{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \tilde{y} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}} \frac{\tilde{y}^T \Sigma \tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_2 \|\tilde{y}\|_2} = \min_{\substack{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \tilde{y} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}} \frac{\sigma_1 y_1 x_1 + \dots + \sigma_n y_n x_n}{\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = -\sigma_1$$

原因 $\left\langle \frac{\sigma_1 x_1 + \dots + \sigma_n y_n x_n}{\sqrt{\dots} \sqrt{\dots}} \right\rangle \leq \sigma_1 \rightarrow \min = -\sigma_1$

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}} \frac{|y^T A x|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \min_{\substack{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \tilde{y} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}} \frac{|\tilde{y}^T \Sigma \tilde{x}|}{\|\tilde{x}\|_2 \|\tilde{y}\|_2} = \min_{\substack{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \tilde{y} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}} \frac{|\sigma_1 x_1 y_1 + \dots + \sigma_n x_n y_n|}{\sqrt{\dots} \sqrt{\dots}} = 0$$

取 $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0, y_{n+1} = 1, y_{n+2} = \dots = y_m = 0$

$x_1 = \dots = x_{n+1} = 0, x_{n+2} = 1, 0$ 可取到

原因 $\frac{|y^T A x|}{\|x\|_2 \|y\|_2} \geq 0 \rightarrow \min = 0$

3. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 Hermitian 矩阵, λ 是 A 的主特征值.

证明: λ 是 A 的每个 $n-1$ 阶主子阵的特征值.

对于 A , 其特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_j < \dots < \lambda_n$

其中 $\lambda_i = \dots = \lambda_j$ 为 A 的主特征值, $\lambda_i = \dots = \lambda_j = \lambda$

用 Cauchy 交错定理, $\forall n-1$ 阶主子式, 其特征值 μ .

$$\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i+1} \leq \dots \leq \mu_{j-1} \leq \lambda_j$$

$$\text{又 } \lambda_i = \dots = \lambda_j = \lambda$$

$$\therefore \mu_i = \dots = \mu_{j-1} = \lambda$$

$\therefore \lambda$ 是 A 的每个 $n-1$ 阶主子阵的特征值

PS: 即 syllabus 上的操作: 若 λ 是 A 的 m 重特征值, 那么 λ 至少是 C 的 m 重特征值

4. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 Hermit 矩阵, $V \in \mathbb{C}^n$, 证明:

$$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(A + VV^*) \leq \lambda_{i+1}(A) \quad (1 \leq i < n)$$

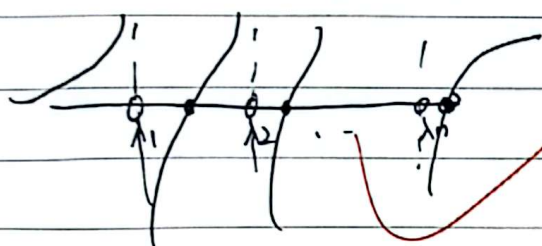
要证 λ 满足 $\det(\lambda I - A - VV^*) = 0$

$$\text{令 } \lambda I - A = D(\lambda) \rightarrow P D(\lambda) P^T = \lambda I - \Sigma$$

$$\det(D(\lambda) - VV^*) = 0 \quad \therefore D(\lambda)^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} P^T \quad \text{令 } V^* P^T = \tilde{V}^* \\ PV = \tilde{V}$$

$$\det(D - VV^*) = \det \begin{bmatrix} I & V^* \\ V & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I - V^* D^{-1} V & 0 \\ V & D \end{bmatrix} = \det(D) \det(I - V^* D^{-1} V) = 0$$

$$\therefore (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \left[1 - \frac{\tilde{V}_1^2}{\lambda - \lambda_1} - \frac{\tilde{V}_2^2}{\lambda - \lambda_2} - \cdots - \frac{\tilde{V}_n^2}{\lambda - \lambda_n} \right] = 0$$



$$\therefore \lambda_i(A) \leq \lambda_i(A + VV^*) \leq \lambda_{i+1}(A)$$

PS: 数值算法与案例分析课程中, 讲对称特征值 divide & conquer 算法时的引

常用结论 $\det(D - VV^*) = \det(D) \det(I - V^* D^{-1} V)$ 增广矩阵的变换

5. 已知 m, n 是正整数且 $1 \leq m < n$. 若 n 阶 Hermitite 正定矩阵 A 可分块表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{n \times n}, \text{ 其中 } A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

用特征值角度去思考

证明: $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 正定, 并且 $\|S\|_2 \|S^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

⇨ Schur 补有正定的传递性

Schur 补的子阵越取越良态

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ps: 因为 A Hermitite 正定, 所以 $A_{11}^* = A_{11}$ $A_{21}^* = A_{12}$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

∵ A 正定

$$\therefore \forall x, x^* A x > 0$$

$$\text{令 } \tilde{x} = \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} x$$

$$\therefore \forall x, \tilde{x}^* \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \tilde{x} > 0.$$

$$\text{又 } \text{rank} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = n$$

$$\therefore \forall \tilde{x}, \tilde{x}^* \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \tilde{x} > 0$$

$$\therefore S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \text{ 正定.}$$

$$\det(I - A) = \det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \right)$$

S^{-1} 是 A^{-1} 主子阵

∴ S 相当于可视为 A 的 $n-k$ 阶主子阵且 S^{-1} 是 A^{-1} 的主子阵

$$\therefore \lambda_i(A) \leq \lambda_i(S) \leq \lambda_{i+k_1}(A) \quad \therefore \|S\|_2 \|S^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}$$

$$\therefore \lambda_{\max}(S) \leq \lambda_n(A)$$

$$\leq \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_1(A)} = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

$$\lambda_{\min}(S) \geq \lambda_1(A)$$

6. (选做) 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 满足 $ab+bc+ca=1$. 求 $40a^2+20b^2+10c^2$ 能取到的最小整数值.
(无需三次方程求根公式, 但借助计算器机会更容易一点)

求解 $\max \frac{ab+bc+ca}{10(4a^2+2b^2+c^2)} \quad (s.t. ab+bc+ca=1)$

令 $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 2a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \text{L} \\ \max \end{matrix} \frac{\tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x}}{10 \tilde{x}^T \tilde{x}} \quad (s.t. \tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x}=1)$

易知, 在 $\tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x}=1$ 条件下, $\frac{1}{10} \max \frac{\tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x}}{\tilde{x}^T \tilde{x}} = \frac{1}{10} \max \lambda(\tilde{A})$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \lambda_{\max}(\tilde{A}) \approx 0.5793431735 \rightarrow 0.5272$

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{4\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \lambda & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \frac{7}{32}\lambda - \frac{1}{32}$

$\therefore$ 最小值为 $\frac{10}{0.5793431735} \approx 17.26$

$\therefore$ 最小整数值为 18

7. (选做) 已知 n, k 为正整数, 且 $1 \leq k \leq n$. 若 X 和 Y 都是 $\mathbb{C}^n$ 的 k 维子空间, 对应的正投影算子分别为 P_X 和 P_Y . 可以定义 X, Y 之间的距离为

$\text{dist}(X, Y) = \|P_X - P_Y\|_2$.

试建立 $\text{dist}(X, Y)$ 与 X, Y 之间的经典角的关系. Golub 矩阵计算
提问助教姐姐 QAQ 这题该怎么做 T T, 谢谢台 2.5.3 节

ppt 老师说 $\cos(\theta_k) = 1 - \frac{\text{dist}^2}{2}$

若 $\text{dist}^2 = \|U_1 - U_2\|_2^2 = \lambda_{\max}(2I_k - U_1^* U_2 - U_2^* U_1)$

$\therefore 1 - \frac{\text{dist}^2}{2} = \lambda_{\min}\left(\frac{U_1^* U_2 + U_2^* U_1}{2}\right)$

又 $\cos(\theta_k) = \sigma_{\min}(U_1^* U_2) = \sigma_{\min}(U_2^* U_1)$

等价于证明 $\sigma_{\min}(A) = \sigma_{\min}\left(\frac{A+A^*}{2}\right)$

然后就不合 T T

但这个也不对啊.

不知道问题出在了哪里

9

由降维计算原理 2.6.1

$$S_1 = \text{ran}(W_1), S_2 = \text{ran}(Z_1) \quad W = \begin{matrix} \text{维} & k & n-k \\ [W_1 & W_2] \end{matrix} \quad Z = \begin{matrix} \text{维} & k & n-k \\ [Z_1 & Z_2] \end{matrix}$$

$$\text{dist}(S_1, S_2) = \|W_1^T Z_2\|_2 = \|Z_1^T W_2\|_2$$

$$\text{证明: } \text{dist}(S_1, S_2) = \|W_1 W_1^T - Z_1 Z_1^T\|_2 = \|W^T (W_1 W_1^T - Z_1 Z_1^T) Z\|_2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 0 & W_1^T Z_2 \\ -W_2^T Z_1 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2$$

$W_2^T Z_1$ 与 $W_1^T Z_2$ 也都是正交阵的子阵

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^T Z_1 & W_1^T Z_2 \\ W_2^T Z_1 & W_2^T Z_2 \end{bmatrix} = W^T Z$$

要证 $\|Q_{12}\|_2 = \|Q_{21}\|_2$

$$Q \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}x \\ Q_{21}x \end{bmatrix} \Rightarrow 1 = \|Q_{11}x\|_2^2 + \|Q_{21}x\|_2^2 \quad \forall x \text{ 均成立}$$

$$\therefore \max_{\|x\|_2=1} \|Q_{21}x\|_2^2 = 1 - \min_{\|x\|_2=1} \|Q_{11}x\|_2^2$$

$$\therefore \|Q_{21}\|_2^2 = 1 - \sigma_{\min}(Q_{11})^2$$

$$\text{同理 } \|Q_{12}\|_2^2 = 1 - \sigma_{\min}(Q_{11})^2 \leftarrow \text{付作 } Q^T F \text{ 的}$$

$$\therefore \|Q_{21}\|_2 = \|Q_{12}\|_2$$

$$\therefore \|Q_{21}\|_2 = \sqrt{1 - \sigma_{\min}(Q_{11})^2} = \sin(\theta_1) \quad \theta \text{ 为最大角}$$

$$\therefore \text{dist}(X, Y) = \sin(\theta_1)$$

↓ 最大经典角

Q_{11} 张为实的
 $\langle x, y \rangle$ 的种.
 $S_1^T S_2 = W_1^T Z_2 = Q_{11}$

1. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 Hermitic 矩阵, 其 (i, j) 元素为 $a_{i,j}$.

证明: 每个圆盘

$$D_i = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \}$$

中至少含有 A 的一个特征值

与课上证明 $\left| \frac{\lambda_i(X^*AX) - \lambda_i(A)}{\lambda_i(A)} \right| \leq \|X^*X - I\|_2$ 一样的做法.

构造为 0 的项 $\lambda_i(XXX)$ 让右端凑出 $|a_{i,i}|^2$ 的格式. $\star$

本质: Weyl 不等式.

$k=1, \dots, n$

A_k 非 Hermitic

记 A_k 为第 k 行被替换成 $[0, \dots, 0, a_{k,k}, 0, \dots, 0]$, 其它行都与 A 一样的矩阵.

A_k 的一个特征值为 $a_{k,k}$. $\det(A_k - a_{k,k}I) = 0$.

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{kk} & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

又对 A_k 中的 $(1:k, 1:k)$ 子阵, 和 $(1:k-1, 1:k-1)$ 子阵用 Cauchy 交错



$$\lambda_i(A_k) \leq \lambda_i(A_{k-1}) \leq \lambda_i(A_k)$$

又对 $(k=n, k=n)$ 和 $(k+1=n, k+1=n)$ 也用 Cauchy 交错

可得 $a_{k,k}$ 为 A_k 第 k 大特征值

$$\lambda_k(A_k) = a_{k,k}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} x & | & x \\ & a_{ii} & \\ x & | & x \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} | & \\ - & 0 & - \\ | & \end{bmatrix}$$

由 Weyl $|\lambda_k(A) - \lambda_k(A_k)| \leq \|A - A_k\|_2 \leq \|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{j \neq k} |a_{k,j}|^2}$

$$|\lambda_k(A) - a_{k,k}|^2 \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|^2$$

$\therefore$ 每个圆盘中都至少含有 A 的一个特征值

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(A - a_{ii}E)| \leq \|A - (A - a_{ii}E)\|_2 \leq \sum |a_{ij}|^2$$

PS: 貌似这里不说明 $a_{k,k}$ 是 A_k 的第 k 大特征值也没事

一路用 $\lambda_i(A)$ 下来也可证

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(A_k)| \leq \sqrt{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|^2} \text{ 也证他}$$

2. 若 A 是非奇异的复矩阵, 证明 Kahan 公式

$$\min \left\{ \frac{\|E\|_2}{\|A\|_2} : \det(A+E)=0 \right\} = \frac{1}{\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2}$$

$$\Leftrightarrow \min \{ \|E\|_2 : \det(A+E)=0 \} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$$

令 A 奇异值 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$

1) 范数 $\rightarrow$ 奇异值 $\therefore \frac{1}{\|A^{-1}\|_2} = \frac{1}{\sigma_n} = \underbrace{\sigma_n}_{\text{包含 } \det(A+E)=0} \sigma^{n-1}$

$\rightarrow$ 想到低秩逼近

$$\text{令 } B = A + E$$

$$\text{即证 } \min \{ \|B - A\|_2 : \det(B)=0 \} = \sigma_n(A)$$

$$\because \det(B)=0$$

$$\therefore \text{rank}(B) \leq n-1$$

由最佳低秩逼近 $\min_{\text{rank}(B) \leq n-1} \|A - B\|_2 = \sigma_n(A)$

$\therefore$ 得证.



3. 若 n 是正整数, $F(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换. 证明:

由 $G(x) = F(x) - F(0)$ 定义的变换 $G(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换.

证线性变换 $\Leftrightarrow \begin{cases} T(a+b) = T(a) + T(b) \\ T(ka) = T(k)a \end{cases} \rightarrow T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

① 若 $a+b \neq 0$.

$$\begin{aligned} G(ax+by) &= F(ax+by) - F(0) \\ &= \frac{a}{a+b} F((a+b)x) + \frac{b}{a+b} F((a+b)y) - F(0) \\ &= \frac{a}{a+b} [F((a+b)x) - F(0)] + \frac{b}{a+b} [F((a+b)y) - F(0)] \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad (a+b)F(x) - (a+b)F(0) \quad (a+b)F(y) - (a+b)F(0) \\ &= \frac{a}{a+b} [(a+b)F(x) - (a+b)F(0)] + \frac{b}{a+b} [(a+b)F(y) - (a+b)F(0)] \\ &= aF(x) - aF(0) + bF(y) - bF(0) \\ &= aG(x) + bG(y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

② 若 $a+b=0$

若 $a=b=0$, $\mathbb{R} \mid G(0) = F(0) - F(0) = 0 \quad \checkmark$

若 $a=-b \neq 0$ 此时 $a-b \neq 0$

$$\begin{aligned} G(ax+by) &= G(ax+(a-b)(-y)) \quad \text{由①} \\ &= aG(x) - bG(-y) = aG(x) + bG(y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

其中, $G(-y) = F(-y) - F(0) = -F(y) + 2F(0) - F(0) = -F(y) + F(0) = -G(y)$

综上所述, $G(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换

通过拆分子来证

5. 做练习发现这个技巧: $K \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

1° $G(Kx) = F(Kx) - F(0) = KF(x) + (1-K)F(0) - F(0) = K(F(x) - F(0)) = KG(x)$. [$\forall K=0, G(0)=0$]

2° $G(\frac{x+y}{2}) = F(\frac{x+y}{2}) - F(0) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) - \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}F(0) = \frac{1}{2}G(x) + \frac{1}{2}G(y)$

$\parallel$
 $\frac{1}{2}G(x+y) \quad \therefore G(x+y) = G(x) + G(y)$

、C、D、E、F、G、H、I、J、K、L、M、N、O、P、Q、R、S、T、U、V、W、X、Y、Z

4. 证明: 凸集在仿射变换下的像仍然是凸集

设 $F: V \rightarrow W$ 已知 V 是凸集 F 是仿射变换 求证 W 是凸集.
 $\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n$

$\forall y_1, y_2 \in W$. 设 $F(x_1) = y_1, F(x_2) = y_2, x_1, x_2 \in V$

$\therefore x_1, x_2 \in V$

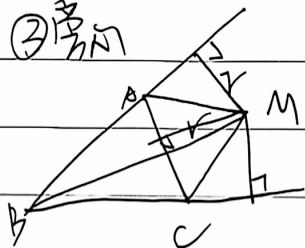
$\therefore \forall \alpha \in [0, 1], \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in V$

$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in W$

$\therefore \forall y_1, y_2 \in W, \alpha \in [0, 1], \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in W$

$\therefore W$ 仍然是凸集

③ 旁心



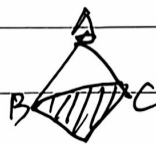
$$|S_{\triangle BMC}| = |S_{\triangle AMC}| = |S_{\triangle AMB}|$$

$$= a = b = c.$$

又 $\therefore$ 是有向面积  $\rightarrow$ 视为实数.

$\therefore$ 三个旁心的坐标分别为

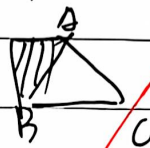
$$\left[\frac{-a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right]$$



$$\left[\frac{a}{a+b+c}, \frac{-b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right]$$



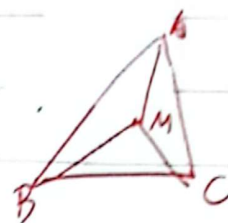
$$\left[\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{-c}{a+b+c} \right]$$



5. 求出三角形的外心, 垂心, 以及三个旁心的重心坐标用三角形的边长, 内角等表示.

★★★ $\alpha A + \beta B + \gamma C = M$

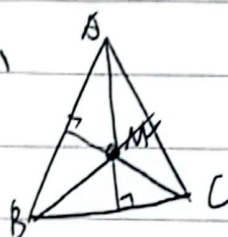
$$\begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\therefore \alpha = \frac{\pm \det \begin{pmatrix} x_M & x_B & x_C \\ y_M & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\pm \det \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}}, \quad \beta = \frac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}}, \quad \gamma = \frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

有向面积

① 外心



$$\angle BMC = 2\angle A$$

$$\angle AMC = 2\angle B$$

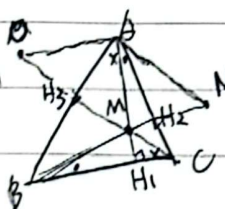
$$\angle AMB = 2\angle C$$

$$\therefore S_{\triangle BMC} = S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AMB}$$

$$= \sin(2A) \cdot \sin(2B) \cdot \sin(2C)$$

$$\therefore \text{重心坐标} \left[\frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right]$$

② 垂心



$$\text{易证垂心有性质 } S_{\triangle BMC} = S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AMB}$$

$$\therefore \tan A = \tan B = \tan C$$

$$\therefore \text{重心坐标} \left[\frac{\tan A}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{\tan B}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{\tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} \right]$$

证法:

$$\tan A = \frac{BH_2}{AH_2} = \frac{CH_3}{AH_3}$$

$$\tan B = \frac{CH_3}{BH_3}$$

$$\tan C = \frac{BH_2}{CH_2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tan B}{\tan A} = \frac{AH_3}{BH_3} = \frac{MN}{BA} \\ \frac{\tan C}{\tan A} = \frac{AH_2}{CH_2} = \frac{OM}{MC} \end{array} \right.$$

$$\therefore \vec{MA} + \frac{\tan B}{\tan A} \vec{MB} + \frac{\tan C}{\tan A} \vec{MC} = \vec{MA} + \vec{NM} + \vec{OM} = \vec{0}$$

$$\therefore \tan A \vec{MA} + \tan B \vec{MB} + \tan C \vec{MC} = \vec{0}$$

由奔驰定理, 易得比为 $\tan A : \tan B : \tan C$

(选做) 6. 已知欧氏空间 R^3 中的四点 P, Q, R, S 关于某个给定的四面体 $ABCD$ 的坐标分别为 $(p_1: p_2: p_3: p_4), (q_1: q_2: q_3: q_4), (r_1: r_2: r_3: r_4), (s_1: s_2: s_3: s_4)$. 证明 P, Q, R, S 共面充要条件

$$\det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix} = 0$$

记 $[ABCD] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M$

$$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix} = N$$

$$[P, Q, R, S] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_P & x_Q & x_R & x_S \\ y_P & y_Q & y_R & y_S \\ z_P & z_Q & z_R & z_S \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P$$

$$\therefore MN = P$$

① 若 P, Q, R, S 共面

$$\text{则 } \det P = 0$$

$$\text{又 } \det M \neq 0$$

$$\therefore \det N = 0$$

② 若 $\det N = 0$

$$\therefore \det P = 0$$

$\therefore P, Q, R, S$ 共面

$\therefore$ 充要

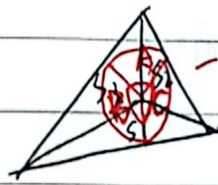
(选做) 7. 在欧氏平面 R^2 上, 若 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, D, E, F 分别为 I 在 BC, CA, AB 边上的垂足, 设 $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$. 证明:

$$I = \frac{aD + bE + cF}{a+b+c}$$

与 5. 异曲同工

$\Leftrightarrow$ 证 $\frac{S_{\triangle IBE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a}{a+b+c}$ $\frac{S_{\triangle ICF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{b}{a+b+c}$ $\frac{S_{\triangle IDA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{c}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow$ 证 $S_1 = S_2 = S_3 = a = b = c$



$S_1 = \frac{1}{2} a \cdot r$
 $S_2 = \frac{1}{2} b \cdot r$
 $S_3 = \frac{1}{2} c \cdot r$
 $\therefore$ 显然成立. $\sin C$

(题设) 8. 若 n 是正整数, f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数. 函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ 都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

证明: 对任何 $x_1, \dots, x_n \in \Omega$, 都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$$

用数学归纳法.

1° 当 $n=2$ 时. 成立 ✓

2° 假设 $n=k$ 时.
$$f\left(\frac{x_1+\dots+x_k}{k}\right) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_k)}{k}$$

$n=k+1$ 时.

$$f\left(\frac{x_1+\dots+x_{k+1}}{k+1}\right) = f\left(\frac{(k+1)\frac{x_1+\dots+x_k}{k} + \frac{k-1}{k+1}(x_1+\dots+x_{k+1})}{2k}\right)$$

$$= f\left(\frac{x_1+\dots+x_k + x_{k+1} + \frac{k-1}{k+1}(x_1+\dots+x_{k+1})}{2k}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{x_1+\dots+x_k}{k}\right) + f\left(\frac{x_{k+1} + (k-1)\frac{x_1+\dots+x_{k+1}}{k+1}}{k}\right) \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_1)+\dots+f(x_k)}{k} + \frac{f(x_{k+1}) + (k-1)f\left(\frac{x_1+\dots+x_{k+1}}{k+1}\right)}{k} \right]$$

$$\text{假设} \quad \frac{k+1}{2k} f\left(\frac{x_1+\dots+x_{k+1}}{k+1}\right) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_{k+1})}{2k}$$

$$\therefore f\left(\frac{x_1+\dots+x_{k+1}}{k+1}\right) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_{k+1})}{k+1}$$

$$\therefore \forall n. f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$$