复旦大学数学科学学院

2019~2020 学年第二学期期末考试试卷

B 卷

课程名称：课程代码：

开课院系：考试形式：线上考试（闭卷）

线上考试

姓名：　　　　学号：　　　　专业：

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

（装订线内不要答题）

1.　（本题共 40 分，每小题 5 分）简答题

(1) 设 $z = x^y(x^2 + y^2\cos x)$，求 z'_x 。

解：$z'_x = yx^{y-1}(x^2 + y^2\cos x) + x^y(2x - y^2\sin x)$。

(2) 求曲线 $\Gamma:\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$ 在点(1, 1, 1)处的切线方程。

解：　切线的方向向量可取为 $v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (1,4,3)$，

切线方程为 $$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{3}。$$

(3) 求 $f(x) = x\ (x \in [0,\pi])$ 的正弦级数。

解：$a_n = 0, n = 0,1,2,\cdots,$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=2\frac{(-1)^{n-1}}{n},n=1,2,\cdots,$$

所以 $f(x)$ 的正弦级数为

$$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx。$$

(4) 求函数 $u=x^2+2y^2-2xy+4x$ 的极值。

解：先求驻点， $u'_x=2x-2y+4,\ u'_y=4y-2x$，得驻点 $(-4,-2)$，

由 $u''_{xx}=2,u''_{yy}=4,u'_{xy}=-2$，在点 $(-4,-2)$，$\Delta=u''_{xx}u''_{yy}-{u''_{xy}}^2=4>0$，

且 $u''_{xx}=2>0$，所以函数在点 $(-4,-2)$ 有极小值 $u_{\min}=-8$。

(5) 解方程 $y'+\frac{1}{x}y=2$。

解： 可得 $(xy)'=2x$，所以通解 $y=\frac{c}{x}+x$。

(6) 计算曲线积分 $\int_L(x+\sin y)dx+(x\cos y-y)dy$，其中 L 是 $y=x^2$ 从(0, 0)到(1, 1)的一段弧。

解：原式 $=\int_0^1(x+\sin x^2+2x(x\cos x^2-x^2)dx=\sin 1$。

(7) 计算 $\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 所围。

解： 原式 $=\int_0^2 zdz\iint\limits_{\Omega_z}dxdy=\pi\int_0^2 z(4-z^2)dz=4\pi$，

其中 $\Omega_z:x^2+y^2\le 4-z^2$。

(8) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot(2n)!}{(3n)!}$ 的收敛性。

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{4}{27}<1$，所以级数收敛。

2（本题共 40 分，每小题 5 分）计算题

（1）求解方程 $(x+2y)dx+(2x-3y^2)dy=0$。

解：通解为 $x^2-2y^3+4xy=c$。

（2）将函数 $y=\ln(1-x+x^2)$ 展开为关于 x 的幂级数。

解：$y=\ln\dfrac{1+x^3}{1+x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^{3n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$，$x\in(-1,1]$。

（3）设隐函数 $y=y(x),z=z(x)$ 由方程 $\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$。

解：方程组两边分别对 x 求导，得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z-x}{y-z},\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x-y}{y-z}$。

（4）求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 上的与平面 $x+2y-3z=12$ 平行的切平面。

解：椭球面的切平面法向为 $(x,2y,3z)$，由条件得

$x=t,y=t,z=-t$，代入原方程得 $t=\pm1$，

所求切平面方程为 $x+2y-3z=\pm8$。

（5）计算曲线积分 $\int_L(e^x\sin y+y)dx+(e^x\cos y+3x)dy$，其中 L 是 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从(0, 0)到(2, 0)的一段弧。

解：补充 $L_1:y=0,x:2\mapsto0$，则

$$\int_{L+L_1}(e^x\sin y+y)dx+(e^x\cos y+3x)dy=-\iint_D 2dxdy=-\pi,$$

原式$=-\pi-\int_{L_1}(e^x\sin y+y)dx+(e^x\cos y+3x)dy=-\pi$。

（6）设 $y=c_1e^x+c_2e^{3x}$ 是常系数齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解,

（1）求 p,q 的值；

（2）求解方程 $y''+py'+qy=x^2e^x$。

解：（1）$p=-4,q=3$。

（2）设 $y^*=(ax^3+bx^2+cx)e^x$ 是方程 $y''+py'+qy=x^2e^x$ 的一个特解，

则　　$6ax+2b+(2\cdot 1-4)(3ax^2+2bx+c)=x^2$，

可得　$a=-\dfrac{1}{6},b=-\dfrac{1}{4},c=-\dfrac{1}{4}$，

方程通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{3x}-\dfrac{1}{12}(2x^3+3x^2+3x)e^x$ 。

（7）计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$。

解：原式$=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}dS=\dfrac{4}{3}\pi$ 。

（8）计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x-y^2)dydz+(y-z^2)dzdx+(z-x^2)dxdy$，

其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2(0\le z\le 1)$ 的上侧。

解：原式$=\iint\limits_{D}\left(2x(x-y^2)+2y(y-(1-x^2-y^2)^2)+(1-2x^2-y^2)\right)dxdy$

$$=\iint\limits_{D}(1+y^2)dxdy=\frac{5}{4}\pi\text{，其中 }D: x^2+y^2\le 1\text{。}$$

3.（本题共 5 分）计算第二类曲线积分 $\int\limits_{\Gamma}(y(z+1)dx+z(x+1)dy+x(y+1)dz$，

其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 x 轴正向看为逆时针方向。

解：设 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 包含在 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的部分，取上侧，

由 Stokes　式，原式$=-\iint\limits_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dS=-\sqrt{3}\pi\text{ 。}$$

4.（本题共 5 分）在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$ 的第一卦限部分上找一点，使得椭球面在该点的切平面与三个坐标平面围成的立体体积最小。

解：设所求点为$P(u,v,w)$，则过这点的切平面为$\frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}+\frac{wz}{c^2}=1$，

所求问题为 $\begin{cases}\max(xyz) \\ s.t.\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(x,y,z\geq 0)\end{cases}$，

解锝 $x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$，即所求点为$P(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$。

5.（本题共 5 分）求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^n}$的和。

解：作幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，收敛区间为$(-1,1)$

$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$，　$x\in(-1,1)$，

积分得 $S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，　$x\in(-1,1)$，

于是$S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\ln(1+\sqrt{2})$，即$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^n}=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$。

6.（本题共 5 分）设 f 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，证明

$$\iint_D f(ax+by)dxdy=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,f(u\sqrt{a^2+b^2})du,$$

其中$a^2+b^2\neq 0$，$D:x^2+y^2\leq 1$。

证：作变换 $u=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},v=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则 $u^2+v^2=x^2+y^2$，

且 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=-1$，

所以 $\iint_D f(ax+by)dxdy=\iint_{u^2+v^2\leq 1} f(u\sqrt{a^2+b^2})dudv$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,f(u\sqrt{a^2+b^2})du。$$