复旦大学数学科学学院

2023～2024 学年第一学期期中考试试卷

课程名称：高等数学 A(上) 课程代码：MATH120021.08

开课院系：数学科学学院 考试形式：闭卷

姓　名：________ 学　号：________ 专　业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									
题 号	9	10	11	12	13	14			
得 分									

（装订线内不要答题）

（以下为试卷正文）

注意：答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. (5 分)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+1}\right)$。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n+1}}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)=\frac{1}{2}$$

2. (5 分)已知$0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}, n=1,2,3,\ldots$；试证明数列$\{x_n\}$收敛，并求出极限。

【证明】：由递推式知$0<x_n<1, n=1,2,\ldots$

当$n>1$时，$x_{n+1}-x_n=\sqrt{1-x_{n-1}}-\sqrt{1-x_n}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{1-x_{n-1}}+\sqrt{1-x_n}}$，$x_2-x_1=1-x_1-\sqrt{1-x_1}<0$

数列$\{x_n\}$是一个严格单调减少的有界数列，所以$\{x_n\}$收敛。

设$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则$x=1-\sqrt{1-x}$，解得$x=0$。(由于$x_n$严格单调减少且$x_1<1$，所以方程的另一个解$x=1$应当舍去)。

3. (5分)求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^x-1}{\ln x-x+1}\right)$。

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^x-1}{\ln x-x+1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{\ln x-x+1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln x}{\ln x-x+1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\infty$$

注意：使用洛必达法则之前必须先检查一下是否满足条件，有一部分同学是这样做的：

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^x-1}{\ln x-x+1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{\ln x-x+1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{e^{x\ln x}(\ln x+1)}{\frac{1}{x}-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{e^{x\ln x}\left((\ln x+1)(\ln x+1)+\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right)=-2$$

大家看看问题出在哪里？

4. (5分)求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\right)$。

方法1：洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\right)=\lim_{x\to0}e\left(\frac{\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to0}e\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to0}e\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}e\left(\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}e\left(\frac{-x}{2x(1+x)}\right)=-\frac{e}{2}$$

方法2：Taylor公式

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\right)=\lim_{x\to0}e\left(\frac{\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to0}e\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to0}e\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-1\right)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}e\left(\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x}\right)=-\frac{e}{2}$$

5. (5分)求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$。

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\left(1+\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{1}{6}$$

说明：本题的关键在于确定$e^{\frac{1}{x}}$要展开到哪一项。

6. (5 分)求曲线$y=\frac{x|x|}{1+x}$的渐近线。

1) 垂直渐近线：$x=-1$

2) $x\to+\infty$时的渐近线：

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{1+x}}{x}=1, b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+x}=-1$$

$$y=x-1$$

3) $x\to-\infty$时的渐近线：

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-x^2}{1+x}}{x}=-1, b=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2}{1+x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x}=1$$

$$y=-x+1$$

7. (5 分)设方程$x^2+2xy-y^3=2x+1$确定了曲线$y=y(x)$，求曲线上点$(0,-1)$处的切线方程。

方程$x^2+2xy-y^3=2x+1$两边关于自变量x求导，得

$$2x+2y+2xy'-3y^2y'=2\Rightarrow y'=\frac{2-2x-2y}{2x-3y^2}\Rightarrow y'(0)=-\frac{4}{3}$$

切线方程为：

$$y=-\frac{4}{3}x-1$$

8. (5 分)设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=a(1-\sin t)\\ y=t\cos t\end{cases}$ $(a\neq 0)$确定，求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-t\sin t}{-a\cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{\cos t-t\sin t}{-a\cos t}\right)'}{-a\cos t}=\frac{-\sin t\cos t-t}{a^2\cos^3 t},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}\pi}{2a^2}$$

（装订线内不要答题）

9. (10 分)设函数$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中函数$\varphi(x)$在$O(a,\delta)(\delta>0)$内存在$n-1$阶连续导函数，求$f^{(n)}(a)$。

由条件知$f(x)$在$O(a,\delta)(\delta>0)$内存在$n-1$阶连续导函数：

$$f^{(n-1)}(x)=n!\ (x-a)\varphi(x)+n(n(n-1)\cdots 3)(x-a)^2\varphi'(x)+\cdots+(x-a)^n\varphi^{n-1}(x)$$

$$f^{(n-1)}(a)=0$$

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=n!\,\varphi(a)$$

说明：大部分同学对"函数$\varphi(x)$在$O(a,\delta)(\delta>0)$内存在$n-1$阶连续导函数"这个条件熟视无睹或不理解，直接对$f(x)$求n阶导数。

10. (10 分)求函数$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$在区间$(-\infty,+\infty)$上的最大值和最小值。

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=1-\frac{x}{x^2+x+1}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

驻点：$x=\pm 1$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	>0		<0		>0
$f(x)$	↗	极大值 $f(-1)=2$	↘	极小值 $f(1)=\frac{2}{3}$	↗

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$

所以$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的最大值为 2,最小值为$\frac{2}{3}$

11. (10 分)设$f^{(k)}(x_0)$为$f(x)$在x_0处的各阶导数($k=1,2,\dots,n$)，$g(x)=f'(x)$。

1) 写出$g(x)$在x_0处带$Peano$余项的$n-1$阶$Taylor$公式;

2) 求$\arccos x$的$2n+1$阶$Maclaurin$公式(带$Peano$余项)。

解:

1) 当$x\to x_0$时,

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{g^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1})$$

$$=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(3)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1})$$

2) 因为$\arccos x=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，所以求$\arccos x$的$2n+1$阶$Maclaurin$公式可以先求出$-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$的$2n$阶$Maclaurin$公式:

当$u\to 0$时

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)u+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}u^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}u^3+\cdots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}u^n+o(u^n)$$

则当$x\to 0$时

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5!!}{6!!}x^6+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

设$f(x)=\arccos x$,则由上式知$f^{(2k)}(0)=0,k=1,2,\cdots,n$

$$f(0)=\frac{\pi}{2},f'(0)=-1,f^{(3)}(0)=-\frac{1}{2}\cdot 2,f^{(5)}(0)=-\frac{3}{8}\cdot 4!,\cdots,f^{(2k+1)}(0)=-\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(2k)!,k=1,2,\cdots,n$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{40}x^5-\cdots-\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1}),x\to 0$$

说明:

1) 绝大部分同学不会运用第一小题的结论计算第二小题。

2) 如果使用定积分的知识，可以有如下的结论:

如果$f(x)$在x_0处n阶可导，$g(x)=f'(x)$，如果$g(x)$在x_0处的$Taylor$公式为 $g(x)=P_{n-1}(x-x_0)+o((x-x_0)^{n-1}),x\to x_0$，其中$P_{n-1}(x-x_0)$是$g(x)$的$n-1$阶$Taylor$多项式，则$f(x)$在$x_0$处的$n$阶$Taylor$公式为:

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}P_{n-1}(t-x_0)dt+o((x-x_0)^n),x\to x_0$$

12. (10 分)设当$x>0$时不等式$2\ln x<x+a$总成立，求a的取值范围。

令$f(x)=x+a-2\ln x$,

$\because \lim\limits_{x\to 0+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,

$\therefore$只要$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值大于零，就能使$2\ln x<x+a$总成立;

$f'(x)=1-\frac{2}{x}$，在$(0,+\infty)$上存在唯一驻点$x=2$,

当$x\in(0,2),f'(x)<0,x\in(2,+\infty),f'(x)>0$,

所以$f(2)=2-2\ln 2+a=\min\limits_{x\in(0,+\infty)}f(x)$.

所以当$a\in(2\ln 2-2,+\infty)$时，不等式$2\ln x<x+a$总成立。

（装订线内不要答题）

13. (10 分)设$f(x)$在$[0,a]$上二阶可导，$f(0)=0,\forall x\in[0,a],f''(x)<0$，求$\frac{f(x)}{x}$在$(0,a]$上的单调性。

解：令$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，则

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

令$G(x)=xf'(x)-f(x)$,则当$x\in(0,a]$时

$$G'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)<0$$

而$G(0)=0$，所以当$x\in(0,a]$时$G(x)<0$，即$F'(x)<0$，

所以$\frac{f(x)}{x}$在$(0,a]$上单调减少。

14. (10 分)设$a>0$，函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$。

分析：

1) 因为要证明的是函数与函数的导数之间的关系，所以确定需要用 Rolle 定理或 Lagrange 中值定理；
2) 要找是否有满足方程$f(x)-\frac{b-x}{a}f'(x)=0$的$x$, 因为方程左边的两项分别包含$f(x)$、$f'(x)$, 所以可以构造辅助函数$g(x)=R(x)f(x)$, 看看是否有$g'(x)=R'(x)f(x)+R(x)f'(x)=0$，即$f(x)=-\frac{R(x)}{R'(x)}f(x)$，所以要求$-\frac{R(x)}{R'(x)}=\frac{b-x}{a}$;
3) 因为我们知道$(x^a)'=ax^{a-1}$，即$\frac{x^a}{(x^a)'}=\frac{x}{a}$，所以想到$\frac{(b-x)^a}{((b-x)^a)'}=-\frac{b-x}{a}$，所以可以构造的辅助函数是：$g(x)=(b-x)^af(x)$。

【证明】:

令$g(x)=(b-x)^af(x)$,则$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$g'(x)=-a(b-x)^{a-1}f(x)+(b-x)^af'(x)$, $g(a)=g(b)=0$，所以由$Rolle$定理知：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$g'(\xi)=-a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)+(b-\xi)^af'(\xi)$，化简得：$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$