（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2023~2024 学年第一学期期末考试试卷

☒ **A 卷**　　☐ **B 卷**　　☐ **C 卷**

课程名称: **高等代数 I**　　**课程代码:** **MATH120011.05/06**

开课院系: **数学科学学院**　　**考试形式:** **闭卷**

姓　　名: ________　　**学　　号:** ________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	一 15 分	二 15 分	三 15 分	四 20 分	五 20 分	六 15 分	**总分** 100 分
得分							

- 请遵守复旦大学考场规定。
- 请用英文或中文答题。
- 不允许使用计算器。
- 书写答案应尽量工整，避免字迹潦草难以辨认。
- 前 8 页为题目及答题纸，请把答案写在前 8 页或其背面。注意保持装订完整。
- 后 4 页为草稿纸，答卷前全部撕下使用，交卷时应一并上交。

第一题，填空题，共 15 分，每题 5 分。将答案按序号写在答题纸上，不要写在原题目上。

考虑 $A=\begin{pmatrix}2 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$。其中 a,b,c 为参数。

1. 考虑多项式 $f(x)=x^{2023}+1$，则矩阵 $f(A)$ 的行列式为__（1）__。

2. A 可对角化的充要条件是__（2）__。

3. 当 A 可对角化时，写出 $\mathbb{C}^{3\times 1}$ 中由 A 的特征向量组成的一组基为__（3）__。

第二题，举例题，共 15 分，每题 5 分。分别举出满足如下条件的 2 阶复矩阵的例子。

1. A 不可对角化。

2. B 和 C 是可对角化矩阵，但是 B 和 C 不可同时对角化。

3. D 是对角阵，E 不是对角阵，但是 D 和 E 可同时对角化。

第三题（共 15 分） 给定正整数 n。设 V 是 n 维 $\mathbb{C}$-线性空间，设 $T: V \to V$ 是线性映射。

1. （5 分）证明：存在 V 的 1 维线性子空间 W_1 满足 $T(W_1) \subset W_1$。
2. （5 分）证明：存在 V 的 $n-1$ 维线性子空间 W_{n-1} 满足 $T(W_{n-1}) \subset W_{n-1}$。
3. （5 分）判断：对任意整数 $0 \leq m \leq n$，是否存在 V 的 m 维线性子空间 W_m 满足 $T(W_m) \subset W_m$? 若成立请给出证明，若不成立请举出反例。

第四题（共 20 分）

给定 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$。定义如下线性映射 $T:\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$，

$$T(X) = AXA + AX + XA。$$

假设 A 是幂零的（即存在一个正整数 r, 使得 $A^r = 0$）。

1. (10 分) 证明：T 也是幂零的。

2. (10 分) 求 T 的特征多项式。

第五题（共 20 分） 给定正整数 $n > m$。设 V 是 n 维 $\mathbb{C}$-线性空间，$T : V \to V$ 是 $\mathbb{C}$-线性映射。假设 $T(W) \subset W$ 对任意 m 维线性子空间 $W \subset V$ 成立。

1. （10 分）证明：$T(W') \subset W'$ 对任意 1 维线性子空间 $W' \subset V$ 成立。

2. （10 分）求出所有满足条件的 T。

第六题（共 15 分） 设 V 是域 F 上的线性空间，T 是 V 上的线性映射。

1. （10 分）设 $f \in F[x]$ 是一个多项式使得 $f(T) = 0$，且 $f = g^r h$，其中 g 和 h 是互素的多项式，r 是正整数。证明：$N(g^r(T)) = N(g^s(T))$ 对任意正整数 $s \geq r$ 成立。其中 $N(-)$ 表示零空间。

2. （5 分）进一步，设 V 是有限维线性空间，p 是 T 的极小多项式，且 $p = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$ 是 $F[x]$ 中的不可约分解。对任意 $1 \leq i \leq m$，取定正整数 $s_i \geq r_i$，且令 $V_i = N(p_i^{s_i}(T))$。证明：

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m。$$

草稿纸

草稿纸

草稿纸

草稿纸