（装订线内不要答题）

2023 年秋季学期课程期中考试试卷答题纸

课程名称: 高等代数 I **课程代码:** MATH120011.05/06

卷 别: ■ A 卷 □ B 卷 □ C 卷

姓 名: ____________ **学 号:** ____________

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）

年 月 日

题号	一 15 分	二 12 分	三 18 分	四 10 分	五 20 分	六 20 分	七 15 分	**总分** 110 分
得分								

- 请遵守复旦大学考场规定。
- 请用英文或中文答题。
- 不允许使用计算器。
- 书写答案应尽量工整，避免字迹潦草难以辨认。
- 前 8 页为题目及答题纸，请把答案写在前 8 页或其背面。注意保持装订完整。
- 后 4 页为草稿纸，答卷前全部撕下使用，交卷时应一并上交。

第一题，填空题，共 15 分，每题 5 分。将答案按序号写在答题纸上，不要写在原题目上

1. 考虑实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。使得 CA 是行简化阶梯矩阵（RREF）的一个可逆实矩阵 $C = \underline{\ (1)\ }$。

2. 考虑 1 中的 A，实系数线性方程组

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的解集是$\underline{\ (2)\ }$（答案应当表示为列向量空间 $\mathbb{R}^{4\times 1}$ 中的带自由参数的集合）。

3. 考虑 $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 由 $T(X) = CXC$ 给出，其中 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$。考虑有序基 $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$。则 T 在 $\mathcal{B}$ 下的表示矩阵是$\underline{\ (3)\ }$。

第二题，判断题，共 12 分，每题 4 分。判断下列叙述是否正确。若正确，简要说明理由。若错误，举出反例并简要说明。

1. 设 V 是 F 线性空间且 V_1, V_2, W 是 V 的子空间。如果 $V_1 + W = V_2 + W$ 且 $V_1 \cap W = V_2 \cap W = \{0\}$，则 $V_1 = V_2$。

2. 对任意矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$AB$ 和 BA 相似。

3. 若矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $sA + tB$ 对任意 $s, t \in F$ 都不可逆，则存在一个非零的 $\alpha \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 使得 $B\alpha = A\alpha = 0$。

第三题（共 18 分）

给定有限维 $\mathbb{R}$ 线性空间 V 及两个 V 中的子空间 $V_1 \subset V_2 \subset V$。求最大的整数 k（表示成关于已知空间的维数的函数），使得存在 V 的 k 维子空间 W 满足 $W \cap V_2 = V_1$，并给出一种 W 的构造方法。

第四题（共 10 分） 给定一个 n 维 $\mathbb{R}$ 线性空间 V 及 V 中的 m 维子空间 W。考虑

$$U=\{T:V\to V\mid T\text{是线性映射且对任意}\alpha\in W\text{都有}T\alpha\in W\}.$$

将 U 视为 $L(V)$ 的子空间。计算 U 的维数。

第五题（共 20 分） 将 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 视为自然的 $\mathbb{R}$ 线性空间。对给定的矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，定义线性映射 $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $T(X) = AX - XB$。

1. (10 分) 令 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的一组有序基，计算 $[T]_{\mathcal{B}}$ 的迹 (即对角线上元素之和)，用 $A = (A_{ij}), B = (B_{ij})$ 中的元表示。

2. (10 分) 令 $A = B = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ 是对角矩阵，其中 d_i 是两两不同的实数。计算 T 的像空间的维数。

第六题（共 20 分）给定 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的一个线性子空间 V，使得对任意的 $A\in V$ 及任意的初等矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都有 $PA\in V$。记 $r_V=\max\{\mathrm{rank}(A)\mid A\in V\}$。

1. （8 分）求所有使 $r_V=n$ 的 V。

2. （12 分）给出 $\dim V$ 的计算公式，用 r_V 表示。

第七题（共 15 分） 设 n 和 k 是正整数。

1. (10 分) 设 V 是一个 n 维 $\mathbb{Q}$ 线性空间且 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 是 V 中的非零元。证明：存在一个 V 的 $n-1$ 维子线性空间 W，使得 $\alpha_i \notin W$ 对任意 $1 \leq i \leq k$ 成立。

2. (5 分) 设 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1} \notin \mathbb{Q}$ 是 $2n-1$ 个无理数。求证：存在指标集 $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ 的子集 S 使得 $|S| \geq n$，并且对 S 的任意非空子集 $S' \subset S$，求和 $\sum_{i \in S'} x_i$ 是无理数。

草稿纸

草稿纸

草稿纸

草稿纸