（装订线内不要答题）

2022 年秋季学期课程期末考试试卷答题纸

课程名称: 高等代数 I **课程代码**: MATH120011.05/06

卷　别: ■ A 卷　□ B 卷　□ C 卷

姓　名: ____________ **学　号**: ____________

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）

年　月　日

题号	1 15 分	2 15 分	3 15 分	4 20 分	5 20 分	6 15 分	**总分** 100 分
得分							

- 请遵守复旦大学考场规定。
- 请用英文或中文答题。
- 不允许使用计算器。
- 书写答案应尽量工整，避免字迹潦草难以辨认。
- 前 8 页为题目及答题纸，请把答案写在前 8 页或其背面。注意保持装订完整。
- 后 4 页为草稿纸，答卷前全部撕下使用，交卷时应一并上交。

第一题，填空题，共 15 分，每题 5 分。将答案按序号写在答题纸上，不要写在原题目上

考虑 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$。令 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ 是 A 的三个特征值且 V_1, V_2, V_3 是对应的特征空间。

1. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) =$ __(1)__。
2. 考虑 $\alpha = [1,2,3]^T$。设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，其中 $\alpha_i \in V_i \, (i = 1,2,3)$。则 $\alpha_1 =$ __(2)__。
3. 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & 2I_3 \\ I_3 & A \end{bmatrix}$ 的行列式为 __(3)__。

第二题，判断题，共 15 分，每题 3 分。判断以下命题是否正确，若正确，简要说明理由；若错误，举出反例并给出简要解释。

1. 若 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是两个幂零矩阵，则 AB 也是幂零矩阵。

2. 若一个上三角矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可对角化，则它一定是对角阵。

3. 对于 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 中的矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 数值 $2a+2d-ad+bc$ 是矩阵相似不变量。

4. 给定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，若齐次线性方程组 $Ax = 0\,(x \in \mathbb{C}^{n\times 1})$ 没有非零解，则存在矩阵 $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 使得 $AB = I_m$。

5. 若矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 有相同的极小多项式以及相同的特征多项式, 则 A 与 B 相似。

第三题（共 15 分） 令 T 是有限维 $\mathbb{C}$ 线性空间 V 上的线性映射。设存在 V 的一组有序基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 使得 $T\alpha_i = \alpha_{i+1}$ 对 $1 \leq i \leq n-1$ 且 $T\alpha_n = \alpha_1$。

1. （5 分）计算 T 的特征多项式。

2. （5 分）计算 T 的极小多项式。

3. （5 分）证明：T 可对角化。

第四题（共 20 分）给定矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$。假设 $A^2 = A$ 且 $B^2 = B$。证明：A 与 B 相似当且仅当 $\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(B)$。

第五题（共 20 分） 令 S 和 T 是 n 维 $\mathbb{C}$ 线性空间 V 上的线性映射。假设 T 有 n 个不同的特征值且 $ST = TS$。证明：存在一个多项式 $f \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $S = f(T)$。

第六题（共 15 分）

1. （3 分）设矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 有一个公共的特征向量 $\alpha \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$ 且 $B\alpha = \mu\alpha$，其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$。证明：存在一个可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha_1^T \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ 且 $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \mu & \beta_1^T \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$，其中 $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times 1}$，$A_1, B_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$。

2. （12 分）令 S 和 T 是有限维 $\mathbb{C}$ 线性空间 V 上的线性映射。假设 $T(T-S) = (T-S)S$。证明 T 和 S 有相同的特征多项式。

草稿纸

草稿纸

草稿纸

草稿纸