2022 年秋季学期课程期中考试试卷答题纸

课程名称：高等代数 I　　　　课程代码：MATH120011.05/06

卷　别：■A 卷　□B 卷　□C 卷

姓　名：________________　　　　学　号：________________

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）：

年　月　日

题号	一 (15)	二 (9)	三 (18)	四 (18)	五 (20)	六 (20)	七 (20)	总分 (120)
得分								

注意：

- 请遵守复旦大学考场规定。
- 请用英文或中文答题。
- 书写答案应尽量工整，避免字迹潦草难以辨认。
- 前 8 页为题目及答题纸，请把答案写在前 8 页或其背面。注意保持装订完整。
- 后 4 页为草稿纸，答卷前全部撕下使用，交卷时应一并上交。

第一题，填空题，共 15 分，每题 5 分。将答案按序号写在答题纸上，不要写在原题目上

考虑实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$。

1. 使得 CA 是行简化阶梯矩阵（RREF）的一个可逆实矩阵 $C =$ __(1)__。

2. 以下选项中，使线性方程组 $Ax = y$ 有解的列向量 y 的全部选项是 __(2)__。

   a. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. 实系数线性方程组

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   的解集是 __(3)__（答案应当表示为列向量空间 $\mathbb{R}^{4\times 1}$ 中的带自由参数的集合）。

第二题，判断题，共 9 分，每题 3 分。

依次判断下列叙述是否正确。若正确，简要说明理由。若错误，举出反例并简要说明。

1. 若矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AB = 0$，则 $BA = 0$。

2. 若矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AB = I_n$，则 $BA = I_n$。

3. 设 W_1, W_2, W 是实线性空间 V 中的三个子空间，则

$$(W_1 \cap W) + (W_2 \cap W) = (W_1 + W_2) \cap W.$$

第三题（共 18 分） 令 $m \le n$ 是两个非负整数。记 V 是一个 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间，且 W 是 V 的 m 维线性子空间。

1. (2 分) 计算 V 中的 $\mathrm{Span}(V \setminus W)$ 的维数（不需要过程）。
2. (9 分) 证明：存在一个 V 的线性子空间 W' 使得 $\dim W' = n - m$ 且 $W' \cap W = \{0\}$。
3. (7 分) 假设 $0 < m < n$。证明：满足 $\dim W' = n - m$ 且 $W' \cap W = \{0\}$ 的 V 的线性子空间 W' 有无穷多个。(如果能够证明有至少 2 个这样的 W'，可以得 5 分)

第四题（共 18 分）给定正整数 n。设 V 和 W 是维数大于 0 的有限维 $\mathbb{R}$-线性空间。给定 V 中元素 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$。

1. (9 分) 证明：$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关**当且仅当**对任意 W 中元素 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 都存在一个线性映射 $T:V\to W$ 使得 $T\alpha_i=\beta_i$（$1\le i\le n$）。
2. (9 分) 证明：$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 张成 V **当且仅当**对任意 W 中元素 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 都**最多**存在一个线性映射 $T:V\to W$ 使得 $T\alpha_i=\beta_i$（$1\le i\le n$）。

第五题（共 20 分） 设 V 和 W 为 $\mathbb{R}$-线性空间，$T: V \to W$ 为线性映射，且 $\dim V = 5$。

1. (10 分) 证明：$\operatorname{rank}(T) \leq 3$ 当且仅当对于任意 4 维子空间 $U \subset V$，都有 $\dim T(U) \leq 3$。
2. (10 分) 证明：$\operatorname{rank}(T) \geq 3$ 当且仅当对于任意 4 维子空间 $U \subset V$，都有 $\dim T(U) \geq 2$。

第六题（共 20 分） 令 n 是正整数。记 V 是所有 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的 $\mathbb{R}$-线性映射全体，视为一个自然的 $\mathbb{R}$-线性空间。

对一个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，记 $L_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 为由 $X \mapsto AX$ 定义的线性映射，记 $R_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 为由 $X \mapsto XA$ 定义的线性映射。

令 $W_1 = \{L_A \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$，$W_2 = \{R_A \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$。易知他们都是 V 的线性子空间。

1. (3 分) 计算 $\dim V$ 并证明你的结论。

2. (6 分) 计算 $\dim W_L$ 和 $\dim W_R$ 并证明你的结论。

3. (11 分) 计算 $\dim(W_L + W_R)$ 并证明你的结论。

第七题（共 20 分） 设 n 是正整数，已知矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AB - BA = A$。

1. (4 分) 证明 $\mathrm{tr}(A) = 0$。
2. (4 分) 对任意给定的正整数 k，$\mathrm{tr}(A^k)$ 是否是一个常数？若是则求出 $\mathrm{tr}(A^k)$，若不是则说明理由。
3. (6 分) A 是否是可逆矩阵？证明你的结论。
4. (6 分) 若 $n = 2$, 那么 A^2 是否是一个与 A 无关的常值矩阵？若是则求出 A^2，若不是则说明理由。

草稿纸

草稿纸

草稿纸

草稿纸