

复旦大学计算机科学技术学院

2018~2019 学年第一学期期末考试试卷

■ A 卷 □ B 卷 □ C 卷

课程名称: 集合与图论 课程代码: COMP130149.01-02

开课院系: 计算机科学技术学院 考试形式: 闭卷

姓名: 学号: 专业:

提示: 请同学们秉持诚实守信宗旨, 谨守考试纪律, 摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为, 学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、判断下列结论是否正确, 并说明理由(每题 5 分, 其中判断正误 1 分, 说明理由 4 分, 共 20 分)。

1. 设 $G(V, E)$ 为图, $E_1 \subseteq E$ 。则 E_1 是 G 的一个边独立集 (即匹配) 当且仅当 $E - E_1$ 是 G 的一个边覆盖。

2. 设 G 为平面图, 顶点数至少为 3, 面数小于 12。则 G 是 4-面可着色的。

3. 设 $A = \{2, 3, 4, 5, 12, 15, 18, 20, 24, 30\}$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b, a \in A, b \in A\}$, $B = \{2, 3\}$, 显然 (A, R) 为一个偏序集。则在 (A, R) 中, B 的上确界是 12。

4. 设 A 为非空集合, R 为 A 上的二元关系。则 A 上包含 R 满足对称性与传递性的最小关系是 $(R \cup R^{-1})^+$ 。

二、设 $A = \{1, a, b, c, d, e\}$ 。求 A 上等价关系的个数。(共 10 分)

三、证明：任何一个强连通的竞赛图必是哈密顿有向图。（共 8 分）

四、求一棵带权为 $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{40}$ 的最优 12 分树，并给出这棵最优 12 分树的权。（12 分）。

（装订线内不要答题）

五、现有 6 位教师 $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ 要给 5 个班级 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 上课，教学任务如下表：

教师 \ 班级	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	2	0	5	1	0
T_2	2	2	0	0	2
T_3	0	3	0	3	0
T_4	1	0	0	0	4
T_5	1	1	2	3	0
T_6	1	2	2	0	1

上表中 T_i 所在的行与 C_j 所在的列的交叉位置的数字表示教师 T_i 为班级 C_j 所上的课时数。现在教务员要给上面的教学任务安排课程表，要求在同一课时里，一位教师只能给一个班级上课，同一个班级也只能有一位教师上课。为完成上述教学任务，至少要安排多少个课时？如果教务员只有 3 个教室可使用，那么为完成上述教学任务，至少要安排多少个课时？（12 分）

六、设 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 。从 S 中取出 n ($n \geq 4$) 个元素进行排列，每个元素可以任意重复使用，要求 a_1 至多出现 2 次， a_2 与 a_3 出现奇数次， a_4 出现偶数次，其它元素出现次数没有限制，求这样的 n -排列数； (10 分)

七、(1) 设 A 、 B 为集合, $\overline{A} = \aleph_0$, $\overline{B} = \aleph$ 。试证明 $\overline{A \times B} = \aleph$ 。

(2) 证明可列个可集的直积的基数为阿列夫。(共 14 分, 每小题 7 分)

八、设 $N(V, E, c, s, t)$ 为一个网络, f 是它的一个可行流。试证明:

(1) 若 P 是 f 的增广路, 即 P 是 s 到 t 的路, 且 $l(P) > 0$, 其中 $l(P) = \min_{a \in P} \{l(a)\}$,

$l(a) = \begin{cases} c(a) - f(a), & \text{当 } a \text{ 是 } P \text{ 的同向弧} \\ f(a), & \text{当 } a \text{ 是 } P \text{ 的反向弧} \end{cases}$ 。现在网络 N 上定义新的流 f 如下:

$$f(a) = \begin{cases} f(a) + l(P), & \text{当 } a \text{ 是 } P \text{ 的同向弧,} \\ f(a) - l(P), & \text{当 } a \text{ 是 } P \text{ 的反向弧,} \\ f(a), & \text{其它.} \end{cases}$$

则 f 是一定是 N 的可行流, 且 $V_f = V_f + l(P)$ 。

(2) f 是 N 最大流当且仅当 N 没有 f 增广路。 (共 14 分, 每小题 7 分)