

复旦大学计算机科学技术学院

2022~2023 学年第一学期期末考试试卷

B 卷

时间 2023 年 2 月 25 日

课程名称: 集合与图论 课程代码: COMP130149.01 COMP130149.03

COMP130149h.01

开课院系: 计算机科学技术学院 考试形式: 闭卷

姓名: 学号: 专业:

提示: 请同学们秉持诚实守信宗旨, 谨守考试纪律, 摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为, 学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
得分										

一、判断下列结论是否正确, 并说明理由 (正确的请证明, 错误的请举出反例)。

(每小题 5 分, 其中判断正误 1 分, 说明理由 4 分; 共 20 分)

(1) 简单图的度序列为  $\{2, 2, 2, 3, 3, 4\}$ , 符合该条件的图是否是二分图?

( )

(装订线内不要答题)

(2) 一次舞会，共有  $n$  位男生和  $n$  位女生参加。已知每位男生至少认识两位女生，而每位女生至多认识两位男生，则能将男生和女生分配为  $n$  对，使得每对中的男生和女生彼此认识。

( )

(3) 设  $f: X \rightarrow Y$  是函数， $A \subseteq X$ ， $B \subseteq X$ ，则  $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$ 。

( )

(4) 如果一个无向图的每一条边确定一个方向，使得所得到的有向图是强连通的，则称该无向图是可定向的。欧拉图是可定向的。

( )

二、设  $A$  是有限集，对于  $A$  的幂集  $P(A)$ ，证明  $|P(A)|=2^{|A|}$ 。 (10 分)

三、证明在简单平面图  $G$  中， $f$  和  $n$  分别表示该图的面数和结点数，

(1) 如果  $n \geq 3$ ，则  $f \leq 2n - 4$ 。

(2)  $G$  中结点最小的度  $\delta(G) = 4$ ，则  $G$  中至少有 6 个结点的度数小于等于 5。

(12 分，每题 6 分)

四、Catalan 数列是序列  $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ ；其中  $C_0 = 1$ ， $C_1 = 1$ ，以及  $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0$ ， $n \geq 2$ 。Catalan 数列是一个常出现在各种计数列。例如， $C_n$  是具有  $n$  个节点二叉树的个数，请证明。(12 分)

五、在一棵二叉树中，如果所有分支结点都存在左子树和右子树，并且所有叶子都在同一层上，这样的二叉树称为完美二叉树。证明：一棵层数为  $k$  的完美二叉树，总节点数为  $2^k-1$ 。  
(共 12 分)

六、设图  $G$  的顶点数为  $n$ ， $\delta(G) > 0$ 。则  $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n$ ，其中  $\alpha_1(G), \beta_1(G)$  分别为  $G$  的边覆盖数与边独立数。（12 分）

七、第一类 Stirling 数表示将  $n$  个不同元素放入  $k$  个环排列中的方式的数目，其中  $S(n, 0) = 0$ ， $S(1, 1) = 1$ ，证明： $S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1) * S(n-1, k)$ 。（12 分）

八、设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是可列集，证明  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  是可列集。(12 分)