

# 复旦大学计算机科学技术学院

## 2022~2023 学年第一学期期末考试试卷

B 卷

时间 2023 年 2 月 25 日

课程名称: 集合与图论 课程代码: COMP130149.01 COMP130149.03

COMP130149h.01

开课院系: 计算机科学技术学院 考试形式: 闭卷

姓名: 学号: 专业:

提示: 请同学们秉持诚实守信宗旨, 谨守考试纪律, 摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为, 学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
得分										

一、判断下列结论是否正确, 并说明理由 (正确的请证明, 错误的请举出反例)。  
(每小题 5 分, 其中判断正误 1 分, 说明理由 4 分; 共 20 分)

(1) 简单图的度序列为  $\{2, 2, 2, 3, 3, 4\}$ , 符合该条件的图是否是二分图?

(否)

存在长度为奇数的回路

(2) 一次舞会, 共有  $n$  位男生和  $n$  位女生参加。已知每位男生至少认识两位女生, 而每位女生至多认识两位男生, 则能将男生和女生分配为  $n$  对, 使得每对中的男生和女生彼此认识。

(真)

二分图, 由 hall 婚姻定理推导

(3) 设  $f: X \rightarrow Y$  是函数,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq X$ , 则  $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$ 。

(真)

对  $\forall y \in f(A) - f(B)$ , 则有  $y \in f(A)$ ,  $y \notin f(B)$ 。因为  $f: X \rightarrow Y$  是函数,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq X$ ,  $f: A \rightarrow f(A)$  是满射函数, 即,  $\exists x \in A$ ,  $y = f(x) \in f(A)$ 。由  $y \notin f(B)$ ,  $f: B \rightarrow f(B)$  是满射函数, 所以  $x \notin B$ , 从而  $x \in A - B$ , 使  $f(x) = y$ , 即  $y \in f(A - B)$ 。所以  $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$ 。

(4) 如果一个无向图的每一条边确定一个方向, 使得所得到的有向图是强连通的, 则称该

无向图是可定向的。欧拉图是可定向的。

(真)

基于回路，回路定向

二、设  $A$  是有限集，对于  $A$  的幂集  $P(A)$ ，证明  $|P(A)|=2^{|A|}$ 。(10 分)

证明：对于有限集合  $A$ ，设  $|A|=n$ 。从  $n$  个元素中选取  $i$  个元素有  $C(n, i)$  种取法。所以  $|P(A)|=C(n, 0)+C(n, 1)+C(n, 2)+\dots+C(n, n)=(1+1)^n=2^n$ ，即  $|P(A)|=2^{|A|}$ 。

三、证明在简单平面图  $G$  中， $f$  和  $n$  分别表示该图的面数和结点数，

(1) 如果  $n \geq 3$ ，则  $f \leq 2n-4$ 。

(2)  $G$  中结点最小的度  $\delta(G)=4$ ，则  $G$  中至少有 6 个结点的度数小于等于 5。

(12 分，每题 6 分)

(1) 证明：假设图中的边数为  $e$ 。由于简单图的每个面至少由 3 条边围成，因此  $3f \leq 2e$ 。由欧拉公式  $n-e+f=2$ ，得  $e=n+f-2$ ；代入  $3f \leq 2e$  得到  $3f \leq 2(n+f-2)$ ，得  $f \leq 2n-4$ 。

(2) 证明：假设  $G$  中至多有 5 个结点的度数小于等于 5。因为  $\delta(G)=4$ ，则  $\sum d(v) \geq 5 \times 4 + 6(n-5)$ 。因为  $\sum d(v)=2e$ ，则  $e \geq 3n-5$ 。由(1)， $e \leq 3n-6$ 。

四、Catalan 数列是序列  $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ ；其中  $C_0=1, C_1=1$ ，以及  $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0, n \geq 2$ 。Catalan 数列是一个常出现在各种计数列。例如， $C_n$  是具有  $n$  个节点二叉树的个数，请证明。(12 分)

证明：显然， $C_0=1, C_1=1$ ；对于  $C_n, n \geq 2$ ，二叉树存在一个根，将  $n-1$  个节点分成两个子二叉树：左子树  $k-1$  个节点，右子树  $n-k$  个节点。由乘法原理，二叉树个数为  $f_k$ ，则  $f_k = C_{k-1} * C_{n-k}$ 。因为  $1 \leq k \leq n$ ，根据加法原理，将  $k$  取不同值的排列数相加，得到总的二叉树个数  $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0$ 。■

五、在一棵二叉树中，如果所有分支结点都存在左子树和右子树，并且所有叶子都在同一层上，这样的二叉树称为完美二叉树。证明：一棵层数为  $k$  的完美二叉树，总节点数为  $2^k-1$ 。

(共 12 分)

//证明：数学归纳法

六、设图  $G$  的顶点数为  $n$ ， $\delta(G) > 0$ 。则  $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n$ ，其中  $\alpha_1(G), \beta_1(G)$  分别为  $G$  的边覆盖数与边独立数。(12 分)

书上定理内容

七、第一类 Stirling 数表示将  $n$  个不同元素放入  $k$  个环排列中的方式的数目，其中  $S(n, 0)=0$ ,  $S(1, 1)=1$ , 证明:  $S(n, k)=S(n-1, k-1)+(n-1)*S(n-1, k)$ 。(12 分)

证明: 设  $n$  个不同元素  $a_1, \dots, a_n$  放入  $k$  个环排列中的方式数为  $S(n, k)$ 。在放置过程中, 有两种互不相容的情况:

$\{a_n\}$  是  $k$  个环排列中的一个, 即, 把  $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  划分为  $k-1$  个环排列,  $\{a_n\}$  是作为一个环排列, 则划分数是  $S(n-1, k-1)$ ;

如果  $\{a_n\}$  不是  $k$  个环排列中的一个, 即  $a_n$  与其它的元素构成一个环排列。则首先把  $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  划分成  $k$  个环排列, 则划分数为  $S(n-1, k)$ 。然后再把  $a_n$  加入到  $k$  个环排列中的一个环排列中去, 则有  $n-1$  种加入方式。因此, 由乘法原理, 划分数有  $(n-1)*S(n-1, k)$ 。

应用加法原理于上述两种情况, 得  $S(n, k)=S(n-1, k-1)+(n-1)*S(n-1, k)$ ,  $n>1$ ,  $k\geq 1$ 。■

八、设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是可列集, 证明  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  是可列集。(12 分)

书上作业