**复旦大学计算机科学技术学院**

（ 装 订 线 内 不 要 答 题 ）

**2022~2023学年第一学期期末考试试卷**

**B卷 时间2023年2月25日**

**课程名称： 集合与图论 课程代码： COMP130149.01 COMP130149.03 COMP130149h.01**

**开课院系： 计算机科学技术学院 考试形式：闭卷**

**姓名： 学号： 专业：**

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 总分 |
| 得分 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

一、判断下列结论是否正确，并说明理由（正确的请证明，错误的请举出反例）。（每小题5分，其中判断正误1分，说明理由4分；共20分）

1. 简单图的度序列为{2, 2, 2, 3, 3, 4}，符合该条件的图是否是二分图？

（否）

存在长度为奇数的回路

(2) 一次舞会，共有*n*位男生和*n*位女生参加。已知每位男生至少认识两位女生，而每位女生至多认识两位男生，则能将男生和女生分配为*n*对，使得每对中的男生和女生彼此认识。

（真）

二分图，由hall婚姻定理推导

(3) 设*f*: *X*→*Y* 是函数，*A*⊆*X*，*B*⊆*X*，则*f*(*A*)-*f*(*B*)⊆*f*(*A-B*)。

（真）

对∀*y*∈*f*(*A*) - *f*(*B*)，则有*y*∈*f*(*A*)，*y*∉*f*(*B*)。因为*f*: *X*→*Y* 是函数，*A*⊆*X*，*B*⊆*X*，*f*: *A*→*f*(*A*)是满射函数，即，∃*x*∈*A*，*y*=*f*(*x*)∈*f*(*A*)。由*y*∉*f*(*B*)，*f*: *B*→*f*(*B*)是满射函数，所以*x*∉*B*，从而*x*∈*A*-*B*，使*f*(*x*)=*y*，即*y*∈*f*(*A-B*)。所以*f*(*A*)-*f*(*B*)⊆*f*(*A-B*)。

(4) 如果一个无向图的每一条边确定一个方向，使得所得到的有向图是强连通的，则称该无向图是可定向的。欧拉图是可定向的。

（真）

基于回路，回路定向

二、 设*A*是有限集，对于*A*的幂集*P*(*A*)，证明| *P*(*A*) |=2|*A*|。 （10分）

**证明：**对于有限集合*A*，设|*A*|=*n*。从*n*个元素中选取*i*个元素有C(*n, i*)种取法。所以|*P*(*A*)|=C(*n*, 0)+C(*n*, 1)+C(*n*, 2)+…+C(*n, n*)=(1+1)*n*=2*n*，即|*P*(*A*)|=2|*A*|。

三、证明在简单平面图*G*中， *f* 和*n*分别表示该图的面数和结点数，

(1) 如果*n*≥3，则*f* ≤ 2*n*-4。

(2) *G*中结点最小的度*δ*(*G*)=4，则*G*中至少有6个结点的度数小于等于5。

（12分，每题6分）

（1）证明：假设图中的边数为*e*。由于简单图的每个面至少由3条边围成，因此*3f≤ 2e*。由欧拉公式*n-e+f=2*，得*e=n+f-2*；代入3*f* ≤ 2*e*得到3*f* ≤ 2(*n+f*-2)，得*f* ≤ 2*n*-4。

（2）证明：假设*G*中至多有5个结点的度数小于等于5。因为δ(*G*)=4，则Σ*d*(*v*)≥5×4+6(*n*-5)。因为Σ*d*(*v*)=2*e*，则*e*≥3*n*-5。由(1)，*e*≤3*n*-6。

四、Catalan数列是序列*C*0, *C*1, …, *Cn*, … ；其中*C*0=1，*C*1=1，以及*Cn*= *C*0 *Cn*-1 + *C*1 *Cn*-2 + … + *Cn*-1 *C*0，*n*≥2。Catalan数列是一个常出现在各种计[数列](http://baike.baidu.com/view/39749.htm" \t "_blank)。例如，*Cn* 是具有*n*个节点二叉树的个数，请证明。（12分）

证明：显然，*C*0=1，*C*1=1；对于*Cn*，*n*≥2，二叉树存在一个根，将*n*-1个节点分成两个子二叉树：左子树*k*-1个节点，右子树*n-k*个节点。由乘法原理，二叉树个数为*fk*，则*fk*=*Ck-*1*\*Cn-k*。因为1≤*k≤n*，根据加法原理，将*k*取不同值的排列数相加，得到总的二叉树个数*Cn*= *C*0 *Cn*-1 + *C*1 *Cn*-2 + … + *Cn*-1 *C*0。▉

五、在一棵二叉树中，如果所有分支结点都存在左子树和右子树，并且所有叶子都在同一层上，这样的二叉树称为完美二叉树。证明：一棵层数为*k*的完美二叉树，总节点数为2*k*-1。

（共12分）

//证明：数学归纳法

六、设图的顶点数为，。则，其中分别为的边覆盖数与边独立数。 （12分）

书上定理内容

七、第一类Stirling数表示将 *n* 个不同元素放入*k*个环排列中的方式的数目，其中*S*(*n*, 0)=0，*S*(1, 1)=1，证明：*S*(*n*, *k*)=*S*(*n*-1, *k*-1)+(*n*-1)\**S*(*n*-1, *k*)。（12分）

证明：设*n*个不同元素*a*1, ……, *an*放入*k*个环排列中的方式数为*S*(*n*, *k*)。在放置过程中，有两种互不相容的情况：

｛*an*｝是*k*个环排列中的一个，即，把｛*a*1,……, *an*-1｝划分为*k*-1个环排列，｛*an*｝是作为一个环排列，则划分数是*S*(*n*-1, *k*-1)；

如果｛*an*｝不是*k*个环排列中的一个，即*an*与其它的元素构成一个环排列。则首先把｛*a*1,……, *an*-1｝划分成*k*个环排列，则划分数为*S*(*n*-1, *k*)。然后再把*an*加入到*k*个环排列中的一个环排列中去，则有*n*-1种加入方式。因此，由乘法原理，划分数有(*n*-1)\**S*(*n*-1, *k*)。

应用加法原理于上述两种情况，得*S*(*n*, *k*)=*S*(*n*-1, *k*-1)+(*n*-1)\**S*(*n*-1, *k*)，*n*>1，*k*≥１。▉

八、设*A*1, *A*2, …, *An*是可列集，证明*A*1×*A*2×*An*是可列集。（12分）

书上作业