

复旦大学计算机科学技术学院

2013-2014 第一学期《集合与图论》期末考试试卷

B 卷 共 7 页

课程代码: COMP120005 考试形式: ☐ 开卷 ☒ 闭卷 2014 年 1 月

(本试卷答卷时间为 120 分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、判断下列结论是否正确, 并说明理由(每题 5 分, 其中判断正误 1 分, 说明理由 4 分, 共 20 分)。

1. 存在 7 个结点的自补图。

(否)

自补图对应的完全图的边数必须是偶数, 而 7 个结点的完全图的边数为 21。

2. 一个有向图 D 中仅有一个顶点的入度为 0, 其余顶点的入度均为 1, 则 D 是有根树。

(否)

一个自环和孤立点

3. 设 A, B, C, D 是任意集合; f 是从 A 到 B 的双射, g 是从 C 到 D 的双射。 $h: A \times C \rightarrow B \times D$, 其中对于任意的 $(a, c) \in A \times C$, $h((a, c)) = (f(a), g(c))$ 成立。则 h 是双射。

(真)

(1) 证明 h 是满射。

对于任意的 $(b, d) \in B \times D$, 则 $b \in B, d \in D$, 因为 f 是从 A 到 B 的双射, g 是从 C 到 D 的双射, 所以存在 $a \in A, c \in C$, 使得 $f(a) = b, g(c) = d$ 成立; 即存在 $(a, c) \in A \times C$, 使得 $h((a, c)) = (f(a), g(c)) = (b, d)$ 成立。所以 h 是满射。

(2) 证明 h 是内射。

对于任意的 $(a_1, c_1) \in A \times C, (a_2, c_2) \in A \times C$, 若 $h((a_1, c_1)) = h((a_2, c_2))$, 所以 $(f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2))$ 。所以 $f(a_1) = f(a_2), g(c_1) = g(c_2)$ 。因为 f 是从 A 到 B 的双射, g 是从 C 到 D 的双射, 所以 $a_1 = a_2, c_1 = c_2$ 。则 $(a_1, c_1) = (a_2, c_2)$ 。所以 h 是内射。
所以 h 是双射。

4. 设 A, B 是集合, 若存在 A 到 B 的满射, 则 $|B| \leq |A|$ 。

(真)

设存在 A 到 B 的满射 f , 对任意 $b \in B$, 存在 $x \in A$, $f(x) = b$ 。

而由函数的定义, $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, 若 $b_1 \neq b_2$, 则 $a_1 \neq a_2$ 。则 $|B| \leq |A|$ 。

二、证明: 任何平面图是 5-可着色的。 (10 分)

证明: 定理 9.10 证明, 112 页。

三、如果在一个地图上任何两个地区都相邻, 问在该地图上最多有几个地区? (10 分)

4

四、 R 是集合 A 上的等价关系, $|A| = n$, $|R| = s$ 。对于 A 关于 R 的商集 A/R , $|A/R| = r$ 。证明: $rs \geq n^2$ 。(14 分)

习题解析:

• R 、 A 和 A/R 三者的基数之间存在什么关系?

1) R 是集合 A 上的等价关系 $\Rightarrow R$ 对 A 形成的一个划分, 这个划分就是商集 A/R 。

2) 取划分的一个块, 若块中元素 k 个, 则该块产生的有序对为 k^2 个。

3) r 个块的有序对相加, 和等于 s 。 r 个块中所含元素的个数相加, 和等于 n 。

证明思路 and 过程:

设 A/R 的 r 个等价类集合的元素个数分别是 m_1, m_2, \dots, m_r 。则 $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$, $m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_r^2 = s$ 。因此, 问题转换为证明 $(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_r^2)/r \geq ((m_1 + m_2 + \dots + m_r)/r)^2$, 即证明 $r(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_r^2) \geq (m_1 + m_2 + \dots + m_r)^2$ 。(可以用数学归纳法进行证明)。

数学归纳法证明: $r(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_r^2) \geq (m_1 + m_2 + \dots + m_r)^2$ 。

归纳基础:

当 $r=1$ 时, 左式 $= m_1^2$, 右式 $= m_1^2$, 左式 \geq 右式, 命题成立。

归纳步骤:

设当 $r=k$ 时, 命题成立。即, $k(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2) \geq (m_1 + m_2 + \dots + m_k)^2$ 。

则当 $r=k+1$ 时, 左式 =

$$(k+1)(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{k+1}^2)$$

$$= k(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2) + (m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{k+1}^2)$$

$$= k(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2) + km_{k+1}^2 + (m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2) + m_{k+1}^2$$

$$= k(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2) + (m_1^2 + m_{k+1}^2) + (m_2^2 + m_{k+1}^2) + \dots + (m_k^2 + m_{k+1}^2) + m_{k+1}^2$$

$$\text{右式} = (m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1})^2$$

$$= (m_1 + m_2 + \dots + m_k)^2 + 2m_{k+1}(m_1 + m_2 + \dots + m_k) + m_{k+1}^2$$

$$= (m_1 + m_2 + \dots + m_k)^2 + 2m_{k+1}m_1 + 2m_{k+1}m_2 + \dots + 2m_{k+1}m_k + m_{k+1}^2$$

由归纳假设 $k(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2) \geq (m_1 + m_2 + \dots + m_k)^2$, 以及基本不等式, 左式 \geq 右式, 命题成立。

所以 $rs \geq n^2$ 。

五、如果有一群人, 其中有 k 个人彼此认识或者有 l 个人彼此不认识。我们用 $r(k, l)$ 表示这群人至少

是有几个人的人数，称为 Ramsey 数。证明： $r(3, 3)=6$ 。(10 分)

证明：6 个点 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 表示 6 个人，两人认识时，在对应的两点连一条绿边，否则连一条红边。根据鸽笼原理，与 v_1 相连的 5 条边中，必有 3 条同色。不访设 $v_1 v_2, v_1 v_3$ 和 $v_1 v_4$ 是 3 条绿边。如果三角形 v_2, v_3, v_4 上有一条绿边，则此绿边与 v_1 构成一个绿色三角形，于是有 3 人彼此认识，否则 v_2, v_3, v_4 构成红色三角形，有 3 人彼此不认识。则 $r(3, 3) \leq 6$ 。5 个点构成的完全图中，可以既无绿色三角形也无红色三角形，则 $r(3, 3) > 5$ 。则 $r(3, 3)=6$ 。

六、证明：任何一个竞赛图是半哈密顿图。(10 分)

证明：

归纳基础：若竞赛图的顶点数小于 4，显然有一条哈密顿有向图。

归纳步骤：假设 n 个顶点的任一竞赛图是半哈密顿有向图。设 G 是 $n+1$ 个顶点的竞赛图，从 G 中删去顶点 v 及其关联边，得到有向图 G' ，由归纳假设， G' 有哈密顿有向路 (v_1, v_2, \dots, v_n) ， G 有 3 种情况：

(1) 在 G 中有一条弧 (v, v_1) ，则有哈密顿有向路 $(v, v_1, v_2, \dots, v_n)$ ；

(2) 在 G 中没有弧 (v, v_1) ，则必有弧 (v_1, v) 。若存在 v_i ， v_i 是 v_1 之后第一个碰到并且有弧 (v, v_i) 的顶点，则显然得到一条哈密顿有向路 $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v, v_i, \dots, v_n)$ ；

(3) 在 G 中没有弧 (v, v_i) ，而对所有 v_i ，均有弧 (v_i, v) ， $i=1, 2, \dots, n$ ，则得一条哈密顿有向路 $(v_1, v_2, \dots, v_n, v)$ 。

七、某一个市镇只有一家旅馆，这个旅馆与通常旅馆没有不同，只是房间数不是有限而是无穷多间，房间号码为 1, 2, 3, 4, ……我们不妨管它叫希尔伯特旅馆。这个旅馆的房间可排成一列的无穷集合 $(1, 2, 3, 4, \dots)$ ，称为可列集。

有一天，所有房间都住满了。后来来了一位客人，坚持要住房间。旅馆老板于是引用“旅馆公理”说：“满了就是满了，非常对不起！”。正好这时候，聪明的旅馆老板的女儿来了，她看见客人和她爸爸都很着急，就说：“这好办，请每位顾客都搬一下，从这间房搬到下一间”。于是 1 号房间的客人搬到 2 号房间，2 号房间的客人搬到 3 号房间……依此类推。最后 1 号房间空出来，请这位迟到的客人住下了。

第二天，希尔伯特旅馆又来了一个庞大的代表团要求住旅馆，他们声称有可数无穷多位代表一定要住，这又把旅馆经理难住了。老板的女儿再一次来解围，她说：“您让 1 号房间客人搬到 2 号，2 号房间客人搬到 4 号……， k 号房间客人搬到 $2k$ 号，这样，1 号，3 号，5 号，……房间就都空出来了，代表团的代表都能住下了。”

第三天，这个代表团每位代表又出新花招，他们想每个人占可数无穷多间房来安排他们的亲戚朋友，这回不仅把老板难住了，连老板的女儿也被难住了。

(1) 现在您担任希尔伯特旅馆的客房经理，您准备采取什么方法解决当前的住宿问题？

(2) 后来老板的女儿进了大学数学系。有一天，康托尔教授来上课，他问老板的女儿：“要是区间 $[0, 1]$ 上每一点都占一个房间，是不是还能安排？”也请您回答康托尔教授的这一问题，并论证。

(16 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分, 其中论证为 8 分)

(1) 定义双射 $f: N \times N \rightarrow N$ (参考教材 49 页到 50 页)

$[0, 1]$ 是不可列集(参考教材 50 页)

八、设 R_1 和 R_2 是 A 上的等价关系, C_1 和 C_2 分别是 A 中关于 R_1 和 R_2 的划分。(10 分)

证明: $R_1 \subseteq R_2$, 当且仅当 C_1 中的每个等价类是包含于 C_2 的一些等价类之中。

证明:

关键: 等价关系与等价类。

分析: 在集合 A 上的任何一个等价关系, 都可以确定一个划分 (A/R), 其元素是有关等价类。所以 $C_1 = A/R_1$, $C_2 = A/R_2$ 。反之, 集合 A 上的任何一个划分都可以确定一个等价关系。

$$C_1 = A/R_1 = \{C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1m}\}$$

$$C_2 = A/R_2 = \{C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2n}\}$$

$$R_1 = \{C_{11} \times C_{11} \cup C_{12} \times C_{12} \cup \dots \cup C_{1m} \times C_{1m}\}$$

$$R_2 = \{C_{21} \times C_{21} \cup C_{22} \times C_{22} \cup \dots \cup C_{2n} \times C_{2n}\}$$

$$R_1 \subseteq R_2 \quad \text{对任意 } C_{1i}, 1 \leq i \leq m, \text{ 存在 } C_{2j}, 1 \leq j \leq n, \text{ 使得 } C_{1i} \subseteq C_{2j}。$$

$$\text{对任意 } C_{1i}, 1 \leq i \leq m, \text{ 存在 } C_{2j}, 1 \leq j \leq n, \text{ 使得 } C_{1i} \subseteq C_{2j} \quad R_1 \subseteq R_2。$$