

# 复旦大学计算机科学技术学院

## 2013-2014 第一学期《集合与图论》期末考试试卷

### B 卷 共 7 页

课程代码: COMP120005 考试形式: ☐ 开卷 ☒ 闭卷 2014 年 1 月  
(本试卷答卷时间为 120 分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

专业\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_成绩\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、判断下列结论是否正确, 并说明理由(每题 5 分, 其中判断正误 1 分, 说明理由 4 分, 共 20 分)。

1. 存在 7 个结点的自补图。

( )

2. 一个有向图  $D$  中仅有一个顶点的入度为 0, 其余顶点的入度均为 1, 则  $D$  是有根树。

( )

(装订线内不要答题)

3. 设  $A, B, C, D$  是任意集合;  $f$  是从  $A$  到  $B$  的双射,  $g$  是从  $C$  到  $D$  的双射。  $h: A \times C \rightarrow B \times D$ , 其中对于任意的  $(a, c) \in A \times C$ ,  $h((a, c)) = (f(a), g(c))$  成立。则  $h$  是双射。  
(      )

4. 设  $A, B$  是集合, 若存在  $A$  到  $B$  的满射, 则  $|B| \leq |A|$ 。  
(      )

二、证明：任何平面图是 5-可着色的。 (10 分)

证明：

三、如果在一个地图上任何两个地区都相邻，问在该地图上最多有几个地区？ (10 分)

四、 $R$  是集合  $A$  上的等价关系,  $|A|=n$ ,  $|R|=s$ 。对于  $A$  关于  $R$  的商集  $A/R$ ,  $|A/R|=r$ 。证明:  $rs \geq n^2$ 。(14 分)

五、如果有一群人，其中有  $k$  个人彼此认识或者有  $l$  个人彼此不认识。我们用  $r(k, l)$  表示这群人至少是有几个人的人数，称为 Ramsey 数。证明： $r(3, 3)=6$ 。(10 分)

证明：

六、证明：任何一个竞赛图是半哈密顿图。(10 分)

证明：

七、某一个市镇只有一家旅馆，这个旅馆与通常旅馆没有不同，只是房间数不是有限而是无穷多间，房间号码为  $1, 2, 3, 4, \dots$  我们不妨管它叫希尔伯特旅馆。这个旅馆的房间可排成一列的无穷集合  $(1, 2, 3, 4, \dots)$ ，称为可列集。

有一天，所有房间都住满了。后来来了一位客人，坚持要住房间。旅馆老板于是引用“旅馆公理”说：“满了就是满了，非常对不起！”。正好这时候，聪明的旅馆老板的女儿来了，她看见客人和她爸爸都很着急，就说：“这好办，请每位顾客都搬一下，从这间房搬到下一间”。于是 1 号房间的客人搬到 2 号房间，2 号房间的客人搬到 3 号房间……依此类推。最后 1 号房间空出来，请这位迟到的客人住下了。

第二天，希尔伯特旅馆又来了一个庞大的代表团要求住旅馆，他们声称有可数无穷多位代表一定要住，这又把旅馆经理难住了。老板的女儿再一次来解围，她说：“您让 1 号房间客人搬到 2 号，2 号房间客人搬到 4 号……， $k$  号房间客人搬到  $2k$  号，这样，1 号，3 号，5 号，……房间就都空出来了，代表团的代表都能住下了。”

第三天，这个代表团每位代表又出新花招，他们想每个人占可数无穷多间房来安排他们的亲戚朋友，这回不仅把老板难住了，连老板的女儿也被难住了。

(1) 现在您担任希尔伯特旅馆的客房经理，您准备采取什么方法解决当前的住宿问题？

(2) 后来老板的女儿进了大学数学系。有一天，康托尔教授来上课，他问老板的女儿：“要是区间  $[0, 1]$  上每一点都占一个房间，是不是还能安排？”也请您回答康托尔教授的这一问题，并论证。

(16 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 10 分，其中论证为 8 分)

八、设  $R_1$  和  $R_2$  是  $A$  上的等价关系， $C_1$  和  $C_2$  分别是  $A$  中关于  $R_1$  和  $R_2$  的划分。(10 分)

证明：  $R_1 \subseteq R_2$ ，当且仅当  $C_1$  中的每个等价类是包含于  $C_2$  的一些等价类之中。

证明：