

《集合与图论》期中考试

(2020年11月12日 复旦大学计算机科学与技术专业2019级)

时间: 2020年11月12日下午1:30—3:30

学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

一、判断题: 先判断正误, 并说明理由 (正确的请证明, 错误的请举出反例)。每小题5分, 共20分。

1. 设 N 为自然数集, $A = \{x^{1905} | x \in N\}$, $B = \{x^{2016} | x \in N\}$ 。则 $\overline{A \cap B} = \overline{A} = \overline{B}$ 。

2. 设 $A = \{2, 3, 4, 5, 24, 15, 36, 48, 50\}$, $B = \{2, 3\}$ 。在 A 上定义偏序关系为整除关系, 所以

$(A, |)$ 为偏序集。则 B 的上确界为 24。

3. 设 R 是集合非空 A 上的等价关系, $|A|=n$, $|R|=s$, A 关于 R 有 r 个等价类, 即 $|A/R|=r$, 这 r 个等价类的元素个数分别是 m_1, m_2, \dots, m_r 。则 $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$, $m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_r^2 = s$ 。

4. 设 A 为非空集合, 则在 A 上不存在既是对称的又是反对称的二元关系。

二、设 A 为集合, $|A|=8$ 。试求集合 A 上恰有 3 个等价类的等价关系个数。(10分)

三、试证明:

- 1) 证明可列个可列集的并是可列集。
- 2) 两个可列集的直积是可列集。

3) 设 A 为集合且 $\overline{A} = 5$ 。试证明可列个 A 的直积的基为 \aleph , 即 $\overline{A \times A \times \cdots \times A \times \cdots} = \aleph$ 。

(每小题 6 分, 共 18 分)

四、设 A, B 为非空集合, (B, \leq) 为偏序集。令 B^A 为集合 A 到集合 B 上所有函数组成的集合,

在 B^A 上的二元关系 R : $fRg \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in A$ 。

1) 证明 R 为 B^A 的偏序关系。

2) 给出 (B^A, R) 存在最大元的充要条件, 并求出 (B^A, R) 最大元的一般形式。

(每小题 6 分, 共 12 分)

五、由 0,1,2,3,4,5 组成的 n 位数中，要求 1 出现至多两次，2 出现奇数次，3 出现偶数次，其它数字出现的次数没有限制，求这样的 n 位共有多少个（注意 n 位数要求 0 不能出现在首位）？（10 分）

六、设 n 个元素 a_1, a_2, \dots, a_n ，每个元素都不在自己原来位置的排列数称之为错排数（即所有 a_i 都不在第 i 个位置上， $i=1,2,\dots,n$ ），求 n 个元素的错排列的个数。（10 分）