

khb 2025 集合与图论期中

一、判断正误，正确的请证明证明，错误的举出反例或说明理由

1. 集合 $A = \{x^{1965} \mid x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x^{2027} \mid x \in \mathbb{N}\}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cap B}}$

2. 集合 $A = \{2, 3, 4, 5, 24, 15, 36, 48, 50\}$, 集合 $B = \{2, 3\}$, 在 A 上定义偏序关系为整除关系, 则 B 的上确界为 24

3. 平面上坐标都是有理数的正三角形组成的集合是可列集

需要注意这个集合实际上是空集

4. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 关系 $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ 不具有传递性

二、求 6 个元素的集合上含有 4 个等价类的等价关系的个数

三、证明

(1) 可列个可列集的并是可列集

(2) 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则可列个 A 的直积的基数为 \aleph , 即 $\overline{\overline{A \times A \times A \times \dots}} = \aleph$

四、设 A, B 非空集合, (B, \leq) 是偏序集, 令 B^A 表示从 A 到 B 的所有映射的集合, 在 B^A 上的二元关系 R : fRg 当且仅当 $f(x) \leq g(x), \forall x \in A$

(1) 证明: R 是 B^A 上的偏序关系

(2) 给出 (B^A, R) 存在最大元的充要条件, 并求出 (B^A, R) 最大元的一般形式

五、由 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成 n 位数, 其中 1 出现的次数不超过两次, 2 只能出现奇数次, 3 只能出现偶数次, 4、5、0 出现的次数不限, 求满足条件的 n 位数的个数 (注意 0 不能出现在首位)

六、方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 30$, 其中 $0 < x_1 \leq 15, 5 \leq x_2 < 20, -6 \leq x_3 < 10$ 求方程整数解的个数 (数据范围记不清了, 拿的去年的数据)

七、在 3×7 的正方形组成的矩形中，将正方形涂成红色或者黑色，求证：一定存在非简单子矩形（非 $1 \times k$ 和 $k \times 1$ ），它的 4 个角都是同色的

八、求下列递推公式的通项公式

(1) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ ($n \geq 2$)，其中 $a_0 = 0, a_1 = 1$

(2) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - n + 2^n$ ($n \geq 2$)，其中 $a_0 = 0, a_1 = 1$ ，只需写出递推形式，不需求解