2026-2027 学年第一学期线性代数（MATH10031.14）期中测试

参考答案

一、填空题

1. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足$\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{X}=$ _____.

【答案】$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

【解析】$\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})=\boldsymbol{C}$，$|\boldsymbol{A}|=1\neq 0$，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}|=4\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}$ 均可逆

两边先左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再右乘 $(\mathbf{B}+\mathbf{I})^{-1}$，得到$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})^{-1}$

计算

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

2. 设三阶可逆矩阵

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],\quad |\boldsymbol{A}|=-2.$$

已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的唯一解为 $\boldsymbol{x}=[1,-2,3]^{\mathrm{T}}$, 则

$$\det([\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{b},\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{b},\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{b}])=\text{_____}.$$

【答案】10

【解析】

利用 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，把 $\boldsymbol{b}$ 表示为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合。 由 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}]$ 和 $\boldsymbol{x}=[1,-2,3]^{\mathrm{T}}$，有$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{2\alpha_2}+\boldsymbol{3\alpha_3}$

因此

$$\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{2\alpha_1}-\boldsymbol{2\alpha_2}+\boldsymbol{3\alpha_3}.$$
$$\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{2b}=\boldsymbol{2\alpha_1}-\boldsymbol{3\alpha_2}+\boldsymbol{6\alpha_3}.$$
$$\boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{2\alpha_2}-\boldsymbol{2\alpha_3}.$$

三列可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘同一个系数矩阵表示：

$$[\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{2b},\boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}2&2&-1\\-2&-3&2\\3&6&-2\end{bmatrix}.$$

取行列式，记上面的系数矩阵为 $\boldsymbol{P}$，$\det([\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{2b},\ \boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{b}])=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{P})$.

$$\det(\boldsymbol{P})=2(6-12)-2(4-6)-(-12+9)=-5$$

由此 $\det([\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{2b},\ \boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{b}])=(-2)\times(-5)=10.$

3. 设三阶矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\a&b&c\end{bmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且$|\boldsymbol{Q}|=1$，则

$$[a,b,c]=\underline{\qquad\qquad}.$$

【答案】$[-2,2,-1]$

【解析】

正交矩阵满足 $\boldsymbol{QQ}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$；因此，$\boldsymbol{Q}$ 的第三行与前两行正交，且第三行模长为 1：

$$\begin{cases}a+2b+2c=0\\2a+b-2c=0\\a^2+b^2+c^2=9\end{cases}$$

前两式联立，得 $a=2c,\ b=-2c$。代入第三式：

$$(2c)^2+(-2c)^2+c^2=9\Rightarrow 9c^2=9$$

故 $c=\pm 1$

$$|\boldsymbol{Q}|=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2c & -2c & c\end{vmatrix}=\frac{c}{27}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{c}{27}(-27)=-c$$

由$|\boldsymbol{Q}|=1$，得$c=-1$；因此 $a=2c=-2,\ b=-2c=2$。

$$[a,b,c]=[-2,2,-1]$$

4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{I}$为四阶单位矩阵，且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$，

则 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=$ _____

【解析&答案】

$B+\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{I}+A)^{-1}(\boldsymbol{I}-A)+\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{I}+A)^{-1}(\boldsymbol{I}-A)+(\boldsymbol{I}+A)^{-1}(\boldsymbol{I}+A)=(\boldsymbol{I}+A)^{-1}[(\boldsymbol{I}-A)+(\boldsymbol{I}+A)]=2(\boldsymbol{I}+A)^{-1}$

所以 $(\boldsymbol{I}+B)^{-1}=[2(\boldsymbol{I}+A)^{-1}]^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 4\end{bmatrix}$

5. 行列式

$$\begin{vmatrix}a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=_____.$$

【答案】$a^2(a^2-4)$

【解析】

由行列式性质恒等变形，例如把 2 行加到 1 行，3 行加到 4 行，再把 1 列的-1倍加到 2 列，4 列的-1倍加到 3 列。

$$\begin{vmatrix}a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 2 & -1\\ -1 & 2 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix}a & 2\\ 2 & a\end{vmatrix}=a^2(a^2-4)$$

二、解答题

6.设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[\lambda,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,\lambda,1]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,\lambda]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[\lambda-3,-2,-2]^{\mathrm{T}}$$

问：当λ分别为何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，且表示法唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出？

(3) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，且表示法不唯一？

【解析&答案】

记$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$即$\lambda\neq -2$且$\lambda\neq 1$时，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3,\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性表出，且表示法唯一.

当$\lambda=-2$时，

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & | & -5\\ 1 & -2 & 1 & | & -2\\ 1 & 1 & -2 & | & -2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & | & -2\\ 0 & -3 & 3 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & -9\end{bmatrix},$$

此时$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性表出

当$\lambda=1$时，

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & | & -2\\ 1 & 1 & 1 & | & -2\\ 1 & 1 & 1 & | & -2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & | & -2\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{bmatrix},$$

此时$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=1<3,\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性表出，且表示法不唯一。

7.已知 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 为三阶满秩方阵，求

$$\boldsymbol{M}=[2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_3]$$

和

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3]$$ 的秩。

【解析&答案】因为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 为三阶满秩方阵，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

将 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 写成矩阵乘积形式：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}},\quad \boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&1&0\\0&3&-4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&2\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，所以 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{M})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}})$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}})$。

计算行列式：

$$|\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}|=\begin{vmatrix}2&0&1\\-1&1&0\\0&3&-4\end{vmatrix}=2(1\cdot(-4)-0)+1(-1\cdot3-0)=-8-3=-11\neq0,$$

$$|\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&2\end{vmatrix}=1(-2-0)-1(2-1)=-2-1=-3\neq0.$$

所以 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}$ 均为满秩矩阵，秩均为 3。

因此，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M})=3$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N})=3$。

8. 设 4 阶矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

【答案】$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$.

【解析】由转置矩阵和逆矩阵的性质，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{AA}^{-1}=I$；$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

由 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 知

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}.$$

那么由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 知 $\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}]^{\mathrm{T}}$.

由

$$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

得

$$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

故$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$

9. 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=1\\ax_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\\bx_1+x_2+2x_3=3\end{cases}$$

有解，其中 a,b 为常数。若 $\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&1\\1&1&a\end{vmatrix}=2$，计算 $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&1&a\\b&1&2\end{vmatrix}$ 的值。

【解析&答案】设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\\ b & 1 & 2\end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & a & 0\\ b & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

因为 $\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=2\neq 0$，所以 $\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A})=3$。

又因为方程组有解，所以 $\mathrm{rank}\,(\overline{\boldsymbol{A}})=\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A})=3$，从而 $|\overline{\boldsymbol{A}}|=0$。

计算 $|\overline{\boldsymbol{A}}|$：

$$|\overline{\boldsymbol{A}}|=\begin{vmatrix}1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & a & 0\\ b & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

按第 4 列展开：

$$|\overline{\boldsymbol{A}}|=1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\\ b & 1 & 2\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\\ b & 1 & 2\end{vmatrix}+3\times 2=0.$$

所以 $\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\\ b & 1 & 2\end{vmatrix}=6$。

10.设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于零，证明：伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩不超过 1。

【证明】由伴随矩阵的性质知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_n=0.$$

于是 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 的解，故

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^*)\leq n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}).$$

又因为 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})\leq n-1$。

若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^*)\leq n-(n-1)=1$；若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})<n-1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式全为零，即 $\boldsymbol{A}^*=0$，此时 $\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}^*)=0\leq 1$。

综上，伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩不超过 1。