复旦大学计算机科学技术学院

2022-2023 学年第一学期《线性代数》期中考试试卷

课程代码：COMP120004.03 考试形式：闭卷 2022 年 11 月

（本试卷答卷时间为 100 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效。）

专业 [redacted] 学号 [redacted] 姓名 [redacted] 成绩：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分	10	10	10	10	20	20	20	100

一、（10 分）使用初等行变换将矩阵化为最简阶梯型矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -18 & 5 & 0.5 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.8 & 2.3 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -9.1 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

∴ 所求为 $\cancel{\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9.1 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -7 & -21 \\ -1 & 3 & -5 & 6 & 11 & 31 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -9 & -21 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & -8 & -27 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -7 & -21 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -9 & -21 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -7 & -21 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

二、(10 分) 求齐次线性方程组的基础解系及通解:

10

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

其系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

对其进行初等行变换得

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∴ 其基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

其通解为 $X = t_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

三、(10 分) 计算 n 阶行列式

10

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$D_1 = 2$ $\quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6$ $\quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 14$

$n>3$ 时. $D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1}$

$= 2D_{n-1} + 2$

$\cancel{\therefore D_n - (1+\sqrt{3})D_{n-1} = (1-\sqrt{3})(D_{n-1}}$

$\therefore D_n + 2 = 2^1(D_{n-1}+2)$

$\therefore D_n + 2 = 2^{n-3}(D_3+2) = 2^n \cdot 2$

$\therefore D_n = 2^{n+1} - 2$

又$\because n=1,2,3$ 时. 上式也成立

$\therefore D_n = 2^{n+1} - 2 \quad (n \in Z^+)$

10

四、(10 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,3,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,\mathrm{a},3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在该基下的坐标为 $(\mathrm{b},\mathrm{c},1)^{\mathrm{T}}$。

(I) 求 a, b, c;

(II) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，并求 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵。

(I) 依题意 $\begin{cases} b+c+1=1 \\ 2b+3c+a=1 \\ b+2c+3=1 \end{cases}$ 二次解得 $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=-2 \end{cases}$

(II) ~~设 $k_1\alpha_2$~~ $\alpha_2=(1,3,2)^T$，$\alpha_3=(1,3,3)^T$，$\beta=(1,1,1)^T$

设 $k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\beta=(0,0,0)^T$ $(k_i \in R)$

则有 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ 3k_1+3k_2+k_3=0 \\ 2k_1+3k_2+k_3=0 \end{cases}$

其系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A)=2\neq 0$

~~$r(A)=3$~~

$\therefore k_1=k_2=k_3=0$

$\therefore \alpha_2\ \alpha_3\ \beta$ 线性无关

对于 R^3 中任意向量 $\gamma\ (x,y,z)$，

设 x',y',z' 满足

$\gamma=x'\alpha_2+y'\alpha_3+z'\beta$

则 $A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\therefore$ rank(A)=3

$\therefore$ 该方程有唯一解

$\therefore \gamma$ 可由 α_2,α_3,β 唯一表示

$\therefore \alpha_2\ \alpha_3\ \beta$ 是 R^3 的一个基.

设 $(\alpha_2\ \alpha_3\ \beta)M=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$

则 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

五、(20 分) 已知 A, B 为 n 阶矩阵，证明:

$$\text{rank}(A-ABA)=\text{rank}(A)+\text{rank}(I_n-BA)\text{ - n}$$

20

令 $C=I_n-BA$

则 原式 $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(AC)=\text{rank}(A)+\text{rank}(C)-n$

作矩阵 $\begin{pmatrix}C&0\\I&A\end{pmatrix}$

对其作初等变换得 $\begin{pmatrix}C&0\\I&A\end{pmatrix}\to \cancel{C=AA}\begin{pmatrix}0&-AC\\I&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-AC\\I&0\end{pmatrix}$

$\therefore$ $\text{rank}\begin{pmatrix}0&-AC\\I&0\end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}C&0\\I&A\end{pmatrix}$

$\therefore$ $n+\text{rank}(AC)\geq\text{rank}(C)+\text{rank}(A)$

即 $\text{rank}(AC)\geq\text{rank}(A)+\text{rank}(C)-n$

且 $\because$ $n+\text{rank}(AC)=\text{rank}\begin{pmatrix}C&0\\I&A\end{pmatrix}$

$\therefore$ ~~由~~所需证 $\text{rank}\begin{pmatrix}I_n-BA&0\\I&A\end{pmatrix}=\text{rank}(I_n-BA)+\text{rank}A$

~~设 rank(A)=m~~

~~则∃ $P_{n\times n}$ $Q_{n\times n}$ 使 $PAQ=\begin{pmatrix}I_m&0\\0&0\end{pmatrix}$ $PA=A'=\begin{pmatrix}A'_0&A'_1\\0&0\end{pmatrix}$ $A'Q=\begin{pmatrix}I_m&0\\0&0\end{pmatrix}$~~

~~令 $P=\begin{pmatrix}P_m&P_1\\P_2&P_3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}A_m&A_1\\A_2&A_3\end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix}Q_m&Q_1\\Q_2&Q_3\end{pmatrix}$~~

~~其中 P_m. A_m Q_m 为 $m\times m$ 方阵~~

~~对A进行一系列初等行变换P. 使 PA=A'. 且A'下方 n−m 行为0~~

~~再对A'进行一系列初等列变换Q. 使 $A'Q=\begin{pmatrix}I_m&0\\0&0\end{pmatrix}$~~

设 rank A = m 令 $A=\begin{pmatrix}A_m&A_1\\A_2&A_3\end{pmatrix}$ 其中 rank $A_m=m$

则 ~~对A进行行变换~~ 令 $P=\begin{pmatrix}I&0\\-A_m^{-1}A_2&I\end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix}I&-A_m^{-1}A_1\\0&I\end{pmatrix}$

则 $PAQ=\begin{pmatrix}A_m&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\therefore$ $A_3-A_1A_m^{-1}A_2=0$

设 ~~PCQ~~ rank C = K 且 $P_1CQ_1=\begin{pmatrix}I_K&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\therefore$ $\text{rank}\begin{pmatrix}C&0\\I&A\end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}I_K&0&0&0\\0&0&0&0\\x_1&x_2&I_m&0\\x_3&x_4&0&0\end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}I_K&0&0&0\\0&I_m&0&0\\0&0&X_4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

其中 $X_4=P_1Q_1-P_1ABQ_1$ ~~P_1ABQ_1~~ 的右下角 $(n-m)\times(n-k)$ 子矩阵

又 $\because$ $P_1=\begin{pmatrix}I&0\\-A_m^{-1}A_2&I\end{pmatrix}$ $Q_1=\begin{pmatrix}I&-A_m^{-1}A_1\\0&I\end{pmatrix}$

$\therefore$ $P_1Q_1-P_1ABQ_1$ ~~P_1ABQ_1~~ $=0$ 即 rank $X_4=0$

$\therefore$ $\text{rank}\begin{pmatrix}I_n-BA&0\\I&A\end{pmatrix}=$ ~~k~~ $k+m=\text{rank}A+\text{rank}(I_n-BA)$

$\therefore$ 原式成立.

$\begin{bmatrix}A-ABA&0\\0&I_n\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}A-ABA&A\\0&I_n\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}0&A\\BA-I_n&I_n\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}A&A\\BA&I_n\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}A&0\\BA&I_n-BA\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-BA\end{bmatrix}$

$\therefore$ $r(A-ABA)+r(I_n)=r(A)+r(I_n-BA)$

证毕

六、(20 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & x_n \end{vmatrix}$$

$D_1 = x_1$

$D_2 = x_1x_2 - yz$

若 $y \neq z$

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y & \cdots & y & 0 \\ z & x_2 & \cdots & y & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ z & z & \cdots & z & x_n - y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ z-y & x_2-y & 0 & \cdots & 0 & y \\ z-y & z-y & x_3-y & \cdots & 0 & y \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ z-y & z-y & z-y & \cdots & x_{n-1}-y & y \\ z-y & z-y & z-y & \cdots & z-y & y \end{vmatrix} + (x_n - y) D_{n-1}$$

若 $y=0$ 则 $D_n = 0 + (x_n - y) D_{n-1}$
$= (x_n - y)(x_{n-1} - y) D_{n-2}$
$= \cdots$
$= \prod_{i=1}^{n} x_n$

若 $y \neq 0$ 则

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - z & y-z & \cdots & y-z & y \\ 0 & x_2 - z & \cdots & y-z & y \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & x_{n-1}-z & y \\ 0 & \cdots & & 0 & y \end{vmatrix} + (x_n - y) D_{n-1}$$

$\therefore D_n = y \cdot \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - z) + (x_n - y) D_{n-1}$ ①

$\because |D_n^T| = |D_n|$ $\therefore |D_n| = |D_n^T| = z \cdot \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y) + (x_n - z) D_{n-1}$ ②

联立①②得 ($y \neq z$时) $D_{n-1} = \dfrac{y \cdot \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - z) - z \cdot \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y)}{y - z}$.

~~$y \neq z$时~~ $\therefore D_n = \dfrac{y \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - z) - z \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - y)}{y - z}$ 且$y=0$时也成立.

若 $y = z$

令 $a = y$,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & x_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & a & & & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & x_1 - a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a & & & x_n - a \end{vmatrix}$$

$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - a) + a \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x_j - a)$

~~综上~~

综上：当 $y \neq z$ 时

$$D_n = \frac{y \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - z) - z \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - y)}{y - z}$$

当 $y = z$ 时

$$D_n = \prod_{i=1}^{n}(x_i - y) + y \sum_{i=1}^{n} \prod_{1 \le j \le n, j \neq i}(x_j - y)$$

七、(20 分) 已知线性方程组:

20

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系为:

$(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1,2n})^T, (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2,2n})^T, \ldots, (b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{n,2n})^T$ n个

试写出下面线性方程组的通解, 并说明理由:

$$(\mathrm{II})\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0 \\ \cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases}$$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{n,2n} \end{pmatrix}$ A为 $n\times 2n$ 矩阵

∴ I方程的基础解系有n个解

∴ $\operatorname{rank}(A) = 2n - n = n$

∴ $\alpha_i = (a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{i2n})$ 线性无关 $(i=1,2\ldots n)$

∵ 基础解系中的n个向量 $\beta_i = (b_{i1}\ b_{i2} \cdots b_{i2n})^T$ 线性无关

∴ (II)的方程的系数矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{12n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{n2n} \end{pmatrix}$ 的秩为n

∴ (II)方程基础解系有n个解

∵ $A\beta_i = 0$

∴ $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\beta_i$ $\alpha_j \cdot \beta_i = 0 \quad (1\le i,j\le n)$

∴ $\beta_i^T \alpha_j^T = 0$

∴ $\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix}\alpha_j^T = 0 \quad (1\le j\le n)$

即 $B\alpha_j^T = 0$.

∴ α_j^T 均为 $BX=0$ 的解

又∵ α_j^T 共n个 且线性无关

∴ II方程的基础解系为 $\alpha_1^T, \alpha_2^T \cdots \alpha_n^T$

∴ 所求通解为 ~~$X = t_1\alpha_1^T + t_2\alpha_2^T + \cdots + t_n\alpha_n^T$, 其中 $t_i \in R$ $(1\le i\le n)$~~

$X = t_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{12n} \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{22n} \end{pmatrix} + \cdots + t_n\begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n2n} \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \cdots t_n \in R)$