

复旦大学信息科学与工程学院

《线性代数》期中考试试卷

共 8 页

课程代码: COMP120004.08

考试形式: ☐ 开卷 ☒ 闭卷

2021 年 11 月

(本试卷答卷时间为 100 分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

1. 若 $x = [1, -2, 1, 0]^T$, $y = [0, 1, -2, 1]^T$, 求 $x^T y$ 、 xy^T 与 $(xy^T)^5$ 的结果, 要求有计算过程。

(10 分)

2. 讨论以下线性方程组当 λ 取不同值, 解的情况 (无解、唯一解、无穷多解), 若有解请写出解集。(12 分)

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

3. 已知在常规矩阵加法和数乘规则下, 所有 2×2 的矩阵构成的集合 $M^{2 \times 2}$ 为线性空间,

(1) 请证明所有 2×2 的对称矩阵 (即转置不变的矩阵) 构成的空间 $S^{2 \times 2}$ 为线性子空间; (4 分)

(2) 给出 $S^{2 \times 2}$ 的两组不同的基; (4 分)

(3) 计算这两组基之间的过渡矩阵; (4 分)

(4) 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 在这两组基下的展开系数。(4 分)

4. 请计算三维空间空间坐标为 $(1, -1, 1)$ 的点 x 到矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的零空间 $N(A)$ 的距

离，要求有具体步骤。(10 分)

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求两个零空间之和 $N(A) + N(B)$ 的基与维度。(10 分)

6. $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ 为四个线性无关向量，请证明

$$\dim \text{span}\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1\} = 3. \quad (10 \text{ 分})$$

7. 对于矩阵 $A_{m \times n}, B_{n \times s}, C_{s \times t}$, 请证明 Frobenius 不等式,

$$\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B). \quad (10 \text{ 分})$$

证:

8. 如果 W 是线性空间 V 的线性子空间, 请证明,

(1) W 的零元即为 V 中的零元, (2 分)

(2) 若 $\dim W = \dim V$, 则 $W = V$. (8 分)

9. W 是线性空间 V 的线性子空间, 已知 $\dim V = n > \dim W = r$, 若给定 W 的一组基 $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$, 请证明一定可以在 $V \setminus W$ 中找到 $n-r$ 个线性无关矢量 $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-r}\}$, 与 $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ 共同构成 V 的基。(12 分)