复旦大学管理学院

2024 ~ 2025 学年第一学期期中考试试卷(共 8 页)

课程名称: 数学分析 BI 课程代码: MATH 20016.06

开课院系: 管理学院 考试形式: 闭卷

姓名: ________ 学号: ________ 专业: ________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1.(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n2^n}{3+\frac{1}{2}3^2+\frac{1}{3}3^3+\cdots+\frac{1}{n}3^n}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1+3^3+5^5+\cdots+(2n-1)^{2n-1}}{2^2+4^4+6^6+\cdots+(2n)^{2n}}}$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{\tan^4 x}}$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-e^x}{\ln(1+2x)+2x}$.

2.(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 设 $f(x) = \sin(\cos x - e^x)$, 求 $f'(0)$.

(2) 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y + \arctan y = \ln(1 + x)$, 求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$.

(3) 设 x, y 满足参数方程 $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}\right|_{t=0}$.

(4) 设 $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

3.(本题 10 分) 求 k 的值使得下面的极限为非零的实数

$$\lim_{n\to\infty} n^k \ln\left(\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\right).$$

4.(本题 10 分) 设 $\boldsymbol{x_1 \in [-\pi, \pi]}$, $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n + \sin x_n}$, $\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \ldots}$.
证明 $\boldsymbol{\{x_n\}}$ 收敛并求极限 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n}$.

5.(本题 10 分) 记 $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}0, & 当\ x\le 0;\\ x^a\sin(x^a), & 当\ x>0,\end{cases}}$.

请关于实数 $\boldsymbol{a}$ 的不同取值讨论:

(1) 何时 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{x=0}$ 点间断? (2) 何时 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{x=0}$ 点连续? (3) 何时 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{x=0}$ 点可导?

6.(本题 10 分) 记 $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$, $g(x) = x\cos x$, 问在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x)$, $g(x)$ 是否分别一致连续?

7.(本题 10 分) 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $[\mathbf{0},+\infty)$ 上连续可导. 问下面的两个条件是否一个能推出另一个? 若能请证明, 若不能请举反例.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)}$ 存在; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f'(x)=0}$.

8.(本题 10 分) 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且对任意的 $\boldsymbol{a < b}$, 将 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $[\boldsymbol{a, b}]$ 上的最大值记为 $\boldsymbol{M(a, b)}$. 已知对任意的 $\boldsymbol{x_1 < x_2 < x_3}$, 成立:$\boldsymbol{M(x_1, x_2) < M(x_2, x_3)}$. 证明 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格单调上升函数.

参考答案:

1/(1)$\boldsymbol{0}$;(2)$\boldsymbol{1}$;(3)$\boldsymbol{e^2}$;(4)$\boldsymbol{-\frac{1}{8}}$.

2/(1)$\boldsymbol{-1}$; (2)$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$,$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$; (3)$\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{2}$; (4)$\boldsymbol{f^{(n)}(0)=(1-(-1)^n)n!}$.

3. 解:

$$\ln\left(\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\right)=\ln\left(1+\frac{1!+2!+3!+\cdots+(n-3)!+(n-2)!+(n-1)!}{n!}\right)$$
$$\leq\ln\left(1+\frac{(n-3)(n-3)!+(n-2)!+(n-1)!}{n!}\right)=\ln\left(1+\frac{(n-3)+(n-2)}{(n-2)(n-1)n}+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n},$$
$$\ln\left(\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\right)>\ln\left(\frac{(n-1)!+n!}{n!}\right)$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}.$$

所以 $\boldsymbol{k=1}$.

4: 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=x+\sin x=x$ 一共有三个不动点 $x^*_{1,2,3}=-\pi,0,\pi$.

(1) 当 $x_1=-\pi$ 或 0 或 π 时, $x_n\equiv x_1$, 所以 $x_n\to x_1$;

(2) 当 $x_1\in(0,\pi)$ 时, 显然在 $x\in(0,\pi)$ 上有 $x<f(x)=x+\sin x=x+\sin(\pi-x)<x+(\pi-x)<\pi$, 所以归纳可证: $0<x_n<x_{n+1}<\pi$. 所以 $\{x_n\}$ 单调上升有上界, 必收敛, 所以 x_n 有极限. 记其极限为 A, 则由迭代式两边取极限可得: $A=A+\sin A$. 又由极限的保序性可知 $0<x_1\leq A\leq\pi$, 所以 $A=\pi$.

(3) 当 $x_1\in(-\pi,0)$ 时, 令 $\tilde{x}_n=-x_n$, 由 (2) 可知 $\tilde{x}_n\to\pi$, 所以 $x_n\to-\pi$.

5. (1) 当 $a<0$ 时 $f(0+0)$ 不存在, 所以 $x=0$ 为间断点;

(2) 当 $a=0$ 时 $f(0+0)=1\neq f(0)=0$, 所以 $x=0$ 仍为间断点;

(3) 当 $a>0$ 时 $f(0+0)=0=f(0)=f(0-0)$, 所以 $x=0$ 为连续点;

(4) 当 $a<\frac{1}{2}$ 时 $f'_+(0)$ 不存在, 所以 $x=0$ 不是可导点;

(5) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时 $f'_+(0)=1\neq f'_-(0)=0$, 所以 $x=0$ 不是可导点;

(6) 当 $a>\frac{1}{2}$ 时 $f'_+(0)=0=f'_-(0)=0$, 所以 $x=0$ 是可导点.

6. 解:(1)$f(x)=x+x(\cos\frac{1}{x}-1)$, 当 $x\to+\infty$ 时 $x(\cos\frac{1}{x}-1)\sim-x\frac{1}{2x^2}=-\frac{1}{2x}\to0$, $f(0+0)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

(2) 取 $x_n^1=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $x_n^2=2n\pi+\frac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}$. 容易验证 $x_n^2-x_n^1\to0$, 但是 $g(x_n^2)-g(x_n^1)=$

$(2n\pi+\frac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n})\sin\dfrac{1}{n}\to 2\pi\neq 0$. 所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致连续.

7. 都不能, 例如
(1)$f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}$, 则 $f(+\infty)=0$ 但是 $f'(+\infty)$ 不存在.
(2)$f(x)=\ln x$, 则 $f'(+\infty)=0$ 但是 $f(+\infty)$ 不存在.

8. 任取 $x_1<x_3$ 先证明 $f(x_1)\leq f(x_3)$.

任取 x_2 使得 $x_1<x_2<x_3$, 则 $f(x_1)\leq M(x_1,x_2)<M(x_2,x_3)$.

所以 $f(x_1)<M(x_2,x_3)$.

利用 $f(x)$ 在 x_3 点的连续性, 有:

$\forall\epsilon>0\exists\delta>0$ 使得当 $x\in(x_3-\delta,x_3+\delta)$ 时

$|f(x)-f(x_3)|<\epsilon\Longrightarrow f(x)<f(x_3)+\epsilon$.

取 $x_2=x_3-\frac{\delta}{2}$, 则 $M(x_2,x_3)<f(x_3)+\epsilon$.

所以 $f(x_1)<M(x_2,x_3)<f(x_3)+\epsilon$.

在不等式 $f(x_1)<f(x_3)+\epsilon$ 中令 $\epsilon\to 0+0$ 得 $f(x_1)\leq f(x_3)$. 所以我们证得 $f(x)$ 是单调上升函数.

再证明 $f(x_1)<f(x_3)$.

不然在区间 $x\in[x_1,x_3]$ 上 $f(x)\equiv f(x_1)$ 此与题目条件矛盾.