复旦大学管理学院

2023 ~ 2024 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：数学分析 BI　课程代码：MATH 120016.08

开课院系：管理学院　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

（装订线内不要答题）

1.（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}\right)$.

(3) $f(x)=\dfrac{1+x^{50}}{1+x+x^{50}}$，求高阶导数 $f^{(100)}(0)$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}\,t}{\int_x^{x+x^3}\cos t\,\mathrm{d}\,t}$.

2. (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分) 计算下列积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\,\mathrm{d}\,x$.

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$.

(3) $\displaystyle\int x\arctan(x^2)\,\mathrm{d}\,x$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+e^{\cos x}}\,\mathrm{d}\,x$.

3. (本题 10 分) 求 $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)}}$ 的 **10** 阶 Maclaurin 展开式带 Peano 余项.

（装订线内不要答题）

4. (本题 10 分) 设 $\boldsymbol{D}$ 是由抛物线 $\boldsymbol{y=1-x^2}$ 与两条直线 $\boldsymbol{x=0}$ 与 $\boldsymbol{y=0}$ 所围成的平面有界区域, 记 $\boldsymbol{D}$ 绕直线 $\boldsymbol{y=0}$ 旋转一周所得旋转体的体积为 $\boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{D}$ 绕直线 $\boldsymbol{x=0}$ 旋转一周所得旋转体的体积为 $\boldsymbol{V_2}$. 请比较 $\boldsymbol{V_1}$ 和 $\boldsymbol{V_2}$ 的大小.

（装订线内不要答题）

5. (本题 10 分) 设在闭区间 $[0,1]$ 上 $f(x)$ 单调增加. 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

6. (本题 10 分) 求最大的非负常数 $\boldsymbol{a}$, 使得不等式 $\boldsymbol{e^x \geq ax^3}$ 对所有的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ 成立.

7. (本题 10 分) 讨论函数 $y = |x|e^x - (2e)x$ 的单调性, 凸性, 求出它的极值点, 拐点, 渐近线, 并作出它的图象.

（装订线内不要答题）

8. (本题 10 分) 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $[\boldsymbol{0,1}]$ 上具有三阶连续导函数, 且 $\boldsymbol{f(0)=f(1)=0}$, $\boldsymbol{f'(0)=f'(1)=1}$. 证明:

(1) 存在 $\boldsymbol{\xi_1} \in \boldsymbol{(0,1)}$ 使得 $\boldsymbol{f'''(\xi_1)=12}$;

(2) 存在 $\boldsymbol{\xi_2} \in \boldsymbol{(0,1)}$ 使得 $\boldsymbol{2\xi_2(1-\xi_2)f'(\xi_2)-(1-2\xi_2)f(\xi_2)=0}$;

(3) 存在 $\boldsymbol{\xi_3} \in \boldsymbol{(0,1)}$ 使得 $\boldsymbol{\xi_3(1-\xi_3)f''(\xi_3)-(1-2\xi_3)f'(\xi_3)=0}$.

草稿纸第 1 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 2 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 3 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 4 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

复旦大学管理学院

2023 ~ 2024 学年第一学期期末考试试卷

B 卷

课程名称：数学分析 BI　　课程代码：MATH 120016.08

开课院系：管理学院　　考试形式：闭卷

姓名：__________　学号：__________　专业：__________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

（装订线内不要答题）

1. (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n^2}\right)$.

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-1}-x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

(3) $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1+x^3}$, 求高阶导数 $f^{(99)}(0)$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x t^2 e^t \,\mathrm{d}\,t}{\displaystyle\int_x^{x+x^3} e^{2t}\,\mathrm{d}\,t}$.

2. (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分) 计算下列积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1+x+x^4}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x$.

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x$.

(3) $\displaystyle\int x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}\,x$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}\,x$.

（装订线内不要答题）

3. (本题 10 分) 求 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{3+2x}{x^2+3x+2}}$ 的 **10** 阶 Maclaurin 展开式带 Peano 余项.

4. (本题 10 分) 设 D 是由曲线 $y=(1-x)^2$ 与两条直线 $x=0$ 与 $y=0$ 所围成的平面有界区域, 记 D 绕直线 $y=0$ 旋转一周所得旋转体的体积为 V_1, D 绕直线 $x=0$ 旋转一周所得旋转体的体积为 V_2. 请比较 V_1 和 V_2 的大小.

5. (本题 10 分) 设在闭区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $f(x)$ 单调增加. 证明:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 x \, \mathrm{d}\, x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, \mathrm{d}\, x$$

（装订线内不要答题）

6.（本题 10 分） 求最大的非负常数 $\boldsymbol{a}$, 使得不等式 $\ln x \leq a\sqrt{x}$ 对所有的 $x > 0$ 成立.

7. (本题 10 分) 讨论函数 $\boldsymbol{y = e^x - e|x|}$ 的单调性, 凸性, 求出它的极值点, 渐近线, 并作出它的图象.

（装订线内不要答题）

8. (本题 10 分) 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ 上具有二阶连续导函数, 且 $\boldsymbol{f(0) = f'(0) = 0}$, $\boldsymbol{f(1) = 1}$. 证明:

(1) 存在 $\boldsymbol{\xi_1} \in \boldsymbol{(0, 1)}$ 使得 $\boldsymbol{f''(\xi_1) = 2}$;

(2) 存在 $\boldsymbol{\xi_2} \in \boldsymbol{(0, 1)}$ 使得 $\boldsymbol{2\xi_2 f'(\xi_2) - 3f(\xi_2) = \xi_2^2}$.

草稿纸第 1 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 2 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 3 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 4 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

A 卷答案

1. (1)$\frac{4}{e}$; (2)$\frac{1}{6}$; (3)$-49\times 100!$; (4)$\frac{1}{3}$.

2. (1)$-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\arctan x+C$; (2)$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}+C$; (3)$\frac{1}{2}x^2\arctan(x^2)-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$; (4)$1$.

3. 解: $f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1+x}{1+x^2}$, 所求 10 阶 Maclarin 公式为

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}(-1)^k x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{5}(-1)^k x^{2k}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{4}(-1)^k x^{2k+1}+o(x^{10})$$

4.

$$V_1=\pi\int_0^1(1-x^2)^2\,\mathrm{d}\,x=\frac{8\pi}{15}$$
$$V_2=\pi\int_0^1(1-y)\,\mathrm{d}\,y=\frac{\pi}{2}$$

所以 $V_1>V_2$.

5. 证明:

$$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}\,x\overset{t=x^{n+1}}{=}\int_0^1 f(\sqrt[n+1]{t})\,\mathrm{d}\,t$$
$$\geq\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

6. **解法一:** 只要考虑 $x>0$ 时使 $e^x\geq ax^3$ 成立. 令 $f(x)=\frac{e^x}{x^3}$, 我们来求此函数在 $x>0$ 时的最小值.

$$f'(x)=\frac{e^x x^2(x-3)}{x^6}=0\Longrightarrow x=3$$

当 $0<x<3$ 时 $f'(x)<0$, 当 $3<x$ 时 $f'(x)>0$. 所以 $f(3)=\frac{e^3}{27}$ 是 $f(x)$ 在 $x>0$ 时的最小值.

所以能使不等式成立的最大的 $a=\frac{e^3}{27}$.

解法二: 猜测最大的 a 能使两曲线 $y=e^x$ 和 $y=ax^3$ 相切, 令

$$\begin{cases}e^x=ax^3\\ e^x=3ax^2\end{cases}\Longrightarrow x=3,a=\frac{e^3}{27}$$

下面来证明 $e^x\geq ax^3$, 令 $f(x)=x-3\ln x-\ln a$, $f'(x)=\frac{x-3}{x}$.

当 $0<x<3$ 时 $f'(x)<0$, 当 $3<x$ 时 $f'(x)>0$. 所以当 $x>0$ 时 $f(x)\geq f(3)=0$. 即 $a=\frac{e^3}{27}$ 为所求的最大值.

7.(略).

8.(1) 做辅助函数 $g_1(x) = f(x) - x(1-x)(1-2x)$, 则 $g_1(0) = g_1(1) = g_1'(0) = g_1'(1) = 0$, 由 Rolle 定理可知存在 $\xi_1 \in (0,1)$ 使得 $g_1'''(\xi_1) = 0$, 此时 $f'''(\xi_1) = 12$.

(2) 做辅助函数 $g_2(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$, 并定义 $g_2(0) = g_2(0+0) = 0$, $g_2(1) = g_2(1-0) = 0$. 由 Rolle 定理可知存在 $\xi_2 \in (0,1)$ 使得 $g_1'(\xi_2) = 0$, 此时 $2\xi_2(1-\xi_2)f'(\xi_2) - (1-2\xi_2)f(\xi_2) = 0$.

(3) 由 $f'(0) = 1 > 0$, 可知存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $x \in (0, \delta_1)$ 时: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0 \Longrightarrow f(x) > f(0) = 0$.

同理存在 $\delta_2 > 0$ 使得 $x \in (1-\delta_2, 1)$ 时: $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} > 0 \Longrightarrow f(x) < f(1) = 0$.

所以存在 $b \in (0,1)$ 使得 $f(b) = 0$. 又 $f(0) = f(1) = 0$, 所以由 Rolle 定理可知:

存在 $a \in (0,b)$ 使得 $f'(a) = 0$, 存在 $c \in (b,1)$ 使得 $f'(c) = 0$.

做辅助函数 $g_3(x) = \dfrac{f'(x)}{x(1-x)}$, 则 $g_3(a) = g_3(c) = 0$. 由 Rolle 定理可知存在 $\xi_3 \in (a,c) \subset (0,1)$ 使得 $g_3'(\xi_3) = 0$, 此时 $\xi_3(1-\xi_3)f''(\xi_3) - (1-2\xi_3)f'(\xi_3) = 0$.

B 卷答案

1. (1)$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; (2)$\frac{1}{2}$; (3)$-99!$; (4)$\frac{1}{3}$.

2. (1)$x+\frac{1}{2}\arctan(x^2)+C$; (2)$-\ln|\sin x+\cos x|+C$; (3)$\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C$; (4)$\frac{\pi}{2}$.

3. 解: $f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}$, 所求 10 阶 Maclarin 公式为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k x^k+\sum_{k=0}^{10}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}x^k}+o(x^{10})$$

4.

$$\begin{aligned}V_1=&\pi\int_0^1(1-x)^4\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{5}\\V_2=&\pi\int_0^1(1-\sqrt{y})^2\,\mathrm{d}\,y=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

所以 $V_1>V_2$.

5. 证明:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}\,x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)2\cos^2x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)(1-2\cos^2x)\,\mathrm{d}\,x\\=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)(\sin^2x-\cos^2x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 和 $\sin^2 x$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 都是单调上升函数, 所以

$$(f(\frac{\pi}{2}-x)-f(x))(\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)-\sin^2(x))\geq 0$$

利用变量代换 $t=\frac{\pi}{2}-x$ 可以验证:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2}-x)\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^2x\,\mathrm{d}\,x\\&\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2}-x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos^2x\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(\frac{\pi}{2}-x)-f(x))(\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)-\sin^2(x))\,\mathrm{d}\,x\geq 0\\\Longleftrightarrow&\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^2x\,\mathrm{d}\,x\geq\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos^2x\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

结论得证.

6. 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 我们来求此函数在 $x>0$ 时的最小值.

$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}=0\Longrightarrow x=e^2$$

当 $0<x<e^2$ 时 $f'(x)>0$, 当 $e^2<x$ 时 $f'(x)<0$. 所以 $f(e^2)=\dfrac{2}{e}$ 是 $f(x)$ 在 $x>0$ 时的最大值.
所以能使不等式成立的最大的 $a=\dfrac{2}{e}$.
7.(略).
8.(1) 做辅助函数 $g_1(x)=f(x)-x^2$, 则 $g_1(0)=g_1(1)=g_1'(0)=0$, 由 Rolle 定理可知存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使得 $g_1''(\xi_1)=0$, 此时 $f''(\xi_1)=2$.
(2) 做辅助函数 $g_2(x)=\dfrac{f(x)-x^2}{\sqrt{x^3}}$, 并定义 $g_2(0)=g_2(0+0)=0$. 由 Rolle 定理可知存在 $\xi_2\in(0,1)$ 使得 $g_2'(\xi_2)=0$, 此时 $2\xi_2f'(\xi_2)-3f(\xi_2)=\xi_2^2$.