复旦大学管理学院

2023 ~ 2024 学年第一学期期中考试试卷(共 8 页)

课程名称: 数学分析 BI 课程代码: MATH 20016.06

开课院系: 管理学院 考试形式: 闭卷

姓名: ________________ 学号: ________________ 专业: ________________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1.(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{3n}}{1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{2n}}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1+3!+5!+\cdots+(2n-1)!}{2!+4!+6!+\cdots+(2n)!}}$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}$.

2.(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 设 $f(x)=\arcsin(\sin x)$, 求 $f'(\frac{3\pi}{4})$.

(2) 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y+\ln(1+y)=\arctan x$, 求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$.

(3) 设 x, y 满足参数方程 $\begin{cases} x=t+e^{\tan t}\cos t \\ y=e^{\tan t}\sin t \end{cases}$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

(4) 设 $f(x)=\sin^2 x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

3.(本题 10 分) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1+2^2-3^3+\cdots+(-n)^n}{(-n)^n}=1$.

4.(本题 10 分) 设 $\boldsymbol{x_{n+1} = \sin x_n}$, $\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \ldots}$. 证明 $\boldsymbol{\{x_n\}}$ 收敛并求极限 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n}$.

5.(本题 10(=6+4) 分) 记 $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$ 设 $f(x) = D(x)\sin x \sin 2x$. 问 (1)$f(x)$ 在哪些点连续? (2)$f(x)$ 在哪些点可导?

6.(本题 10(=5+5) 分) 问 $\boldsymbol{f(x) = x\sin x}$ 及 $\boldsymbol{g(x) = x\sin\frac{1}{x}}$ 在 $\boldsymbol{(0, +\infty)}$ 上是否分别一致连续?

7.(本题 10 分) 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在有界闭区间 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ 上连续且 $\boldsymbol{f(a) \leq f(b)}$. 若对任意的 $\boldsymbol{x_1 \in (a, b)}$, 存在 $\boldsymbol{x_2 \in (a, b)}$ 使得: $\boldsymbol{f(x_2) < f(x_1)}$. 证明 $\forall \boldsymbol{x \in (a, b)}$ 成立: $\boldsymbol{f(x) > f(a)}$.

8.(本题 10(=4+4+2) 分) 证明方程 $\boldsymbol{\frac{1}{x} = \sin x}$, 在区间 $\boldsymbol{2n\pi < x < (2n+1)\pi}$ 上至少有 $\boldsymbol{2}$ 个解, 又假设在此区间上仅有 $\boldsymbol{2}$ 个解, 记为 $\boldsymbol{x_{2n+1}, x_{2n+2}}$, $\boldsymbol{x_{2n+1} < x_{2n+2}}$, $\boldsymbol{n = 0, 1, 2, \ldots}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n+1} - 2n\pi) = 0}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\big(x_{2n+2} - (2n+1)\pi\big) = 0}$;

(2) 求极限 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} n^2\big(x_{2n+1} + x_{2n+2} - (4n+1)\pi\big)}$.

参考答案:

1/(1)$\mathbf{0}$;(2)$\mathbf{1}$;(3)e^{-2};(4)$-\mathbf{1}$.

2/(1)$-\mathbf{1}$; (2)$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{8}$; (3)$\frac{1}{2}$; (4) 当 n 为奇数时 $f^{(n)}(0)=0$, 当 $n\geq 2$ 为偶数时 $f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n}{2}-1}2^{n-1}$.

3. 证明:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{-1+2^2-3^3+\cdots+(-n)^n}{(-n)^n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{-1+2^2-3^3+\cdots+(-n+2)^{n-2}}{(-n)^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{(-n+1)^{n-1}+(-n)^n}{(-n)^n}\\
=&I+II
\end{aligned}
$$

显然

$$
\begin{aligned}
II&=\lim_{n\to\infty}\frac{(-n+1)^{n-1}+(-n)^n}{(-n)^n}=1\\
|I|&\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^3+\cdots+(n-2)^{n-2}}{n^n}\\
&\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-2)^{n-2}}{n^n}=0
\end{aligned}
$$

结论得证.

4: 不妨设 $x_2=\sin x_1>0$, 所以 $0<x_2\leq 1$, 归纳可证 $n>2$ 时均有 $0<x_n\leq 1$; 由基本不等式 $|\sin x|\leq|x|$ 可知, x_n 在 $n\geq 2$ 时是单调下降数列, 所以 x_n 有极限. 记其极限为 A, 则由迭代式两边取极限可得: $A=\sin A$. 所以 $A=0$.

5. (1). $|f(x)|\leq|\sin x\sin 2x|$, 所以当 $\sin x_0\sin 2x_0=0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 点连续;
当 $\sin x_0\sin 2x_0\neq 0$ 时, 一方面, 取 x_n 为有理数列且 $x_n\neq x_0$,$x_n\to x_0$, 则 $f(x_n)\to\sin x_0\sin 2x_0$ 另一方面, 取 x_n 为无理数列且 $x_n\neq x_0$, $x_n\to x_0$, 则 $f(x_n)=0$ 根据 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. 所以 $f(x)$ 在 x_0 点不连续.

所以当且仅当 $\sin x\sin 2x=0$, $x=\frac{k\pi}{2}$ 时 $f(x)$ 连续.

(2) 根据可导必连续的性质, 只须考察 $x_0=\frac{k\pi}{2}$ 时的可导性. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{D(x)\sin x\sin 2x}{x-x_0}=D(x)\sin x\frac{\sin 2x-\sin 2x_0}{x-x_0}$.

$\dfrac{\sin 2x - \sin 2x_0}{x - x_0} \to \cos 2x_0 \neq 0$. 与 (1) 同理可证, $D(x)\sin x$ 当且仅当 $\sin x = 0$ 时有极限.

所以当且仅当 $\sin x = 0$, $x = k\pi$ 时 $f(x)$ 可导.

6. 解:(1) 取 $x_n^1 = 2n\pi$, $x_n^2 = 2n\pi + \dfrac{1}{n}$. 容易验证 $x_n^2 - x_n^1 \to 0$, 但是 $f(x_n^2) - f(x_n^1) = (2n\pi + \dfrac{1}{n})\sin\dfrac{1}{n} \to 2\pi \neq 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续.

(2)$g(0+0) = 0$, $g(+\infty) = 1$. 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

7. 只要证明 $f(x)$ 的最小值不能在内部达到.

反证法: 不然若存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0)$ 达到最小值. 由题设条件存在 $x_2 \in (a, b)$ 使得 $f(x_2) < f(x_0)$, 这与 $f(x_0)$ 为最小值矛盾.

所以最小值不能在内部达到, 只能在边界点取到最小值, 又 $f(a) \leq f(b)$, 所以 $f(a)$ 就是最小值, 且内部点 $x \in (a, b)$ 满足 $f(x) > f(a)$.

8. 记 $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{x}$, 则
(0.1)$n = 0$ 时在 $(0, \pi)$ 区间上, $f(0+0) = -\infty$, $f(\dfrac{\pi}{2}) > 0$, $f(\pi) < 0$. 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 和区间 $(\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ 上分别有一个零点.
(0.2)$n \geq 1$ 时在 $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ 区间上, $f(2n\pi) < 0$, $f(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}) > 0$, $f((2n+1)\pi) < 0$. 所以 $f(x)$ 在区间 $(2n\pi, 2n\pi + \dfrac{\pi}{2})$ 和区间 $(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}, (2n+1)\pi)$ 上分别有一个零点.
(1) 显然 $x_{2n+1} \sim 2n\pi$, $x_{2n+2} \sim 2n\pi$.
$\sin(x_{2n+1} - 2n\pi) = \dfrac{1}{x_{2n+1}}$, 所以 $x_{2n+1} - 2n\pi = \arcsin(\dfrac{1}{x_{2n+1}}) \sim \dfrac{1}{x_{2n+1}} \to 0$.
同理 $(2n+1)\pi - x_{2n+2} = \arcsin(\dfrac{1}{x_{2n+2}}) \sim \dfrac{1}{x_{2n+2}} \to 0$.
(2) 一方面

$$\frac{1}{x_{2n+1}} - \frac{1}{x_{2n+2}} = \frac{x_{2n+2} - x_{2n+1}}{x_{2n+1}x_{2n+2}} \sim \frac{\pi}{(2n\pi)^2} = \frac{1}{4n^2\pi}$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x_{2n+1}} - \frac{1}{x_{2n+2}} = \sin(x_{2n+1}) - \sin(x_{2n+2}) \\
=&2\sin(\frac{x_{2n+1}-x_{2n+2}}{2})\cos(\frac{x_{2n+1}+x_{2n+2}}{2}) \\
\sim&-2\cos(\frac{x_{2n+1}+x_{2n+2}}{2}) \\
=&2\sin(\frac{x_{2n+1}+x_{2n+2}}{2}-(2n+\frac{1}{2})\pi) \\
\sim&x_{2n+1}+x_{2n+2}-(4n+1)\pi
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&x_{2n+1}+x_{2n+2}-(4n+1)\pi \sim \frac{1}{4n^2\pi} \\
&n^2\big(x_{2n+1}+x_{2n+2}-(4n+1)\pi\big) \to \frac{1}{4\pi}
\end{aligned}
$$