复旦大学管理学院

2022 ~ 2023 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：数学分析 BI　　课程代码：MATH 120016.08

开课院系：管理学院　　考试形式：闭卷

姓名：________　学号：________　专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

（装订线内不要答题）

1.（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(n-1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$.

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{e-e^{\cos x}}$.

(3)$f(x)=\dfrac{1+x^{2022}}{1-x^2}$，求高阶导数 $f^{(2022)}(0)$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\sin x}^{2x} t^2 e^{t^2}\,\mathrm{d}\,t}{\int_{\sin x}^{x} e^{t^2}\,\mathrm{d}\,t}$.

2. (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分) 计算下列积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

(2) $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x$.

(3) $\displaystyle\int x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}\,x$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x$.

3. (本题 10 分) 设 $\boldsymbol{n}$ 为正整数, 求 $\mathbf{2n-1}$ 次多项式 $\boldsymbol{P_{2n-1}(x)}$, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases} P_{2n-1}(x), & \text{当 } x<0 \text{ 时;} \\ \arctan x, & \text{当 } x\geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

在 $\boldsymbol{x=0}$ 处有 $\mathbf{2n-1}$ 阶导数.

(装订线内不要答题)

4. (本题 10 分) 设直线 $\boldsymbol{L_1}$ 为函数曲线 $\boldsymbol{L_2}$： $\boldsymbol{y=\sqrt{x-1}}$ 的一条过原点的切线, 设平面有界区域 $\boldsymbol{D}$ 由曲线 $\boldsymbol{L_2}$ 及两条直线 $\boldsymbol{y=0}$ 和 $\boldsymbol{L_1}$ 围成, 求 $\boldsymbol{D}$ 绕直线 $\boldsymbol{y=0}$ 旋转一周所得旋转体的体积.

5. (本题 10 分) 设在闭区间 $[\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}]$ 上 $\boldsymbol{f(x)}$ 单调增加. 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,\mathrm{d}\,x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,\mathrm{d}\,x.$$

（装订线内不要答题）

6.（本题 10 分） 设 $f(x)=\sqrt{x}\ln(x+1)$, $g(x)=\sqrt{x}\sin x$. 分别讨论 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上的一致连续性.

7. (本题 10 分) 讨论函数 $y = e^{-x^2-x}$ 的单调性, 凸性, 求出它的极值点, 拐点, 渐近线, 并作出它的图象.

（装订线内不要答题）

8．(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上具有二阶连续导函数, 且 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)}{1-x}=1$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)+f'(\xi)=0$;

(2) $\min\limits_{x\in[0,1]}\{f''(x)\}<0$ 且 $\max\limits_{x\in[0,1]}\{f''(x)\}\geq 2$.

草稿纸第 1 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 2 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 3 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 4 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

（装订线内不要答题）

复旦大学管理学院

2022 ~ 2023 学年第一学期期末考试试卷

B 卷

课程名称： 数学分析 BI 课程代码： MATH 120016.08

开课院系： 管理学院 考试形式： 闭卷

姓名： ________ 学号： ________ 专业： ________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

1. (本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+\sin x)}{\ln\cos x}$.

(3) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^{2022}}$，求高阶导数 $f^{(2022)}(0)$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_{\sin x}^{2x} xte^{t^2}\,\mathrm{d}\,t}{\displaystyle\int_{\sin x}^{x} e^{t^2}\,\mathrm{d}\,t}$.

2. (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分) 计算下列积分

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$.

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}\,x$.

(3) $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}\,x$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x$.

3. (本题 10 分) 设 n 为正整数, 求 n 次多项式 $P_n(x)$, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{当 } x<0 \text{ 时;} \\ P_n(x), & \text{当 } x\geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$ 在 $x=0$ 处有 n 阶导数.

（装订线内不要答题）

4. **(本题 10 分)** 设直线 L_1 为函数曲线 L_2 : $y = e^x$ 的一条过原点的切线, 设平面有界区域 D 由曲线 L_2 及两条直线 $x = 0$ 和 L_1 围成, 求 D 绕直线 $y = 0$ 旋转一周所得旋转体的体积.

5. (本题 10 分) 设在闭区间 $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ 上 $\boldsymbol{f(x)}$ 单调增加. 证明:
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \le 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

(装订线内不要答题)

6. (本题 10 分) 设 $f(x)=\ln^2(x+1)$, $g(x)=\sin^2(x)$. 分别讨论 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上的一致连续性.

（装订线内不要答题）

7. (本题 10 分) 讨论函数 $y = e^{-x^2+x}$ 的单调性, 凸性, 求出它的极值点, 拐点, 渐近线, 并作出它的图象.

8. (本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可导, 且 $|f'(x)|\le 1$, 又 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)}{1-x}=1$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$;

(2) $0<\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}<\dfrac{1}{2}$.

草稿纸第 1 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 2 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 3 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

草稿纸第 4 页 (不用打印, 但是要留足 4 页)

A 卷答案

1. (1)e^{-1}; (2)0; (3)$2\times 2022!$; (4)14.

2. (1)$\arctan x+\dfrac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$; (2)$2\sqrt{1+e^x}+\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$; (3)$\dfrac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}x^2+C$; (4)$\dfrac{\pi\ln(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$.

3. 解: 先求 $\arctan x$ 的 $2n-1$ 阶 Maclarin 公式.

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n x^{2k}+o(x^{2n-1})$$

两边在 $[0,x]$ 上积分得

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n})$$

所以, $P_{2n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^n}{2k+1}x^{2k+1}$.

4. 由 $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ 可解得切点为 $x=2$, $y=1$. 圆锥体积为 $\dfrac{2\pi}{3}$, 所以

$$\begin{aligned}V=&\frac{2\pi}{3}-\pi\int_1^2(x-1)\,\mathrm{d}\,x\\=&\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

5. 证明:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\,\mathrm{d}\,x\\=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos x\,\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

第二个积分做变量代换 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$, 然后再将 t 换成 x, 得

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f(x)\cos x+f(\frac{\pi}{2}-x)\sin x\right)\mathrm{d}\,x$$

同理可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,\mathrm{d}\,x\\=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f(x)\sin x+f(\frac{\pi}{2}-x)\cos x\right)\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x \,\mathrm{d}\, x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x \,\mathrm{d}\, x \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(f(\frac{\pi}{2}-x) - f(x)\big)(\cos x - \sin x) \,\mathrm{d}\, x \geq 0
\end{aligned}
$$

6. $f'(x)$ 有界, 所以 $f(x)$ 是 Lipschitz 函数, 必一致连续.
$g(x)$ 不是一致连续的, 取 $x_n^1 = 2n^2\pi$, $x_n^2 = 2n^2\pi + \frac{1}{n}$, 则 $x_n^2 - x_n^1 = \frac{1}{n} \to 0$, 但是 $g(x_n^2) - g(x_n^1) = \sqrt{2n^2\pi + \frac{1}{n}}\sin\frac{1}{n} \sim \sqrt{2\pi}n\frac{1}{n} = \sqrt{2\pi}$.
7.(略).
8.(1) 由条件可得 $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -1$.
由 Rolle 定理可知存在 $\xi_1 \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi_1) = 0$.
做辅助函数 $g(x) = e^x f'(x)$, 则 $g(0) = g(\xi_1) = 0$, 同样由 Rolle 定理可知存在 $\xi \in (0,\xi_1) \subset (0,1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$. 容易验证 $f''(\xi) + f'(\xi) = 0$.
(2) 显然 $\max\limits_{x\in[0,1]}\{f''(x)\} \geq f''(0) = 2$. 现证 $\min\limits_{x\in[0,1]}\{f''(x)\} < 0$, 用反证法, 不然 $f''(x) \geq 0$, $f'(0) = 0$, 所以 $f'(x) \geq 0$, 由 $f(1) = f(0) = 0$ 知道 $f(x) \equiv 0$, 此与 $f''(0) = 2$ 矛盾.

B 卷答案

1. (1)$e^{-\frac{1}{2}}$; (2)0; (3)$2022!$; (4)9.

2. (1)$\frac{1}{2}(x+1)^2-2x+\ln|1+x|+C$; (2)$-2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{1+e^{-x}}\right)+C=x-2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)+C$; (3)$-x\cos x+\sin x+C$; (4)$\frac{\pi}{4}$.

3. 解: 即为 e^x 的 n 阶 Maclarin 多项式. 所以, $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k$.

4. 由 $e^x=\frac{e^x}{x}$ 可解得切点为 $x=1$, $y=e$. 圆锥体积为 $\frac{\pi e^2}{3}$, 所以

$$\begin{aligned}V=&\pi\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}\,x-\frac{\pi e^2}{3}\\=&\frac{\pi(e^2-1)}{2}-\frac{\pi e^2}{3}=\frac{\pi(e^2-3)}{6}\end{aligned}$$

5. 证明:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\\=&\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

第二个积分做变量代换 $t=1-x$, 然后再将 t 换成 x, 得

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\big(f(x)+f(1-x)\big)\,\mathrm{d}\,x$$

同理可得

$$\begin{aligned}&2\int_0^1 f(x)x\,\mathrm{d}\,x\\=&2\int_0^{\frac{1}{2}}\big(xf(x)+f(1-x)(1-x)\big)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&2\int_0^1 f(x)x\,\mathrm{d}\,x-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\\=&\int_0^{\frac{1}{2}}\big(f(1-x)-f(x)\big)(1-2x)\,\mathrm{d}\,x\geq 0\end{aligned}$$

6. $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都有界, 所以 $f(x)$ 和 $g'(x)$ 都是 Lipschitz 函数, 必一致连续.

7.(略).

8.(1) 由条件可得 $f(0)=0$,$f'(0)=1$, $f(1)=0$, $f'(1)=-1$.
做辅助函数 $g(x)=e^xf(x)$, 则 $g(0)=g(1)=0$, 由 Rolle 定理可知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$. 容易验证 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

(2) 由 $f(0)=0,f'(0)=1$, 显然 $\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}>0$.

做辅助函数 $g(x)=\begin{cases} x-f(x), & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ (1-x)-f(x), & x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$, 由 $|f'(x)|\le 1$ 可知, $g(x)$ 在 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时单调上升, $g(x)$ 在 $x\in[\frac{1}{2},1]$ 时单调下降, 且 $g(0)=g(1)=0$, 若 $g(\frac{1}{2})=0$ 则 $g(x)\equiv 0$, 此时 $f'(\frac{1}{2})$ 不存在, 矛盾. 所以 $g(\frac{1}{2})>0$, 所以 $\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}<\dfrac{1}{2}$.