复旦大学管理学院

2022 ~ 2023 学年第一学期期中考试试卷(共 8 页)

课程名称: 数学分析 BI 课程代码: MATH 20016.06

开课院系: 管理学院 考试形式: 闭卷

姓名: ________ 学号: ________ 专业: ________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1.(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+4+6+\cdots+2n}-\sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}\right)$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{2!}+\sqrt[3]{3!}+\cdots+\sqrt[n]{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos x)$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

2.(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 设 $f(x)=\arctan\dfrac{\tan x}{2}$, 求 $f'(x)$.

(2) 设 $y=y(x)$ 满足方程 $2^{xy}+y=x$, 求 $y'(0)$.

(3) 设 x,y 满足参数方程 $\begin{cases} x=t+\ln(1+t) \\ y=t+e^{t} \end{cases}$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

(4) 设 $f(x)=(e^{x}-1)(e^{2x}-1)(e^{3x}-1)\cdots(e^{2022x}-1)$, 求 $f^{(2022)}(0)$.

3.(本题 10 分) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

4.(本题 10 分) 设当 $x \neq 0$ 时 $f(x) = x^n \sin \dfrac{1}{x^2}$, $f(0) = 0$. 问

(1) 正整数 n 满足什么条件时 $f'(0)$ 存在?

(2) 正整数 n 满足什么条件时 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 点连续?

5.(本题 10 分) 设 x_n 满足方程 $\cos x + nx = 0$, $n \geq 1$. (1) 证明 $\{x_n\}$ 收敛; (2) 求极限 $\lim_{n\to\infty} n^2(nx_n + 1)$.

6.(本题 10 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0\\ ax+b, & x\geq 0\end{cases}$. 求常数 a,b 使得 $f(x)$ 在实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导.

7.(本题 10 分) 问 $\boldsymbol{f(x) = \ln x}$ 及 $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x}\ln x}$ 在 $\boldsymbol{(0, +\infty)}$ 上是否分别一致连续?

8.(本题 10 分) 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{(0,+\infty)}$ 上连续且 $\boldsymbol{f(0+0)=f(+\infty)=f(1)}$. 证明 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{(0,+\infty)}$ 上有最大值和最小值.

参考答案:

1/(1)$\frac{1}{2}$;(2)1;(3)$-\frac{1}{2}$;(4)1.

2/(1)$\frac{2\sec^2 x}{4+\tan^2 x}=\frac{2}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$; (2)$1+\ln 2$; (3)$\frac{1}{2}$; (4)$(2022!)^2$.

3. 证明: 记 $a_n=\frac{n!}{n^n}<1$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n<1$, 所以 a_n 单调下降有下界, a_n 必收敛, 记其极限为 $A\in[0,1]$. 若 $A\neq 0$ 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{A}{A}=1$, 但是另一方面 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to \frac{1}{e}<1$. 所以 $A=0$.

4: (1) 易证 $n\geq 2$ 时 $f'(0)$ 存在. (2) 易证 $n\geq 4$ 时 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

5. (1)$x_n=-\frac{\cos x_n}{n}\to 0$.

(2)$n^2(nx_n+1)=n^2(1-\cos x_n)\sim n^2\frac{1}{2}x_n^2=\frac{1}{2}(nx_n)^2=\frac{1}{2}\cos^2 x_n\to\frac{1}{2}$.

6. 当 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 显然可导. 当 $x=0$ 时由 $f(x)$ 可导可得 $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{2}$.

7. 解:(1) 取 $x_n^1=\frac{1}{n}$, $x_n^2=\frac{1}{2n}$. 容易验证 $x_n^2-x_n^1\to 0$, 但是 $\ln(x_n^2)-\ln(x_n^1)=-\ln 2\not\to 0$. 所以 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致连续.

(2)$g(0+0)=0$, 所以在 $(0,1]$ 上 $g(x)$ 一致连续.

$g'(x)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$, $g'(+\infty)=0$, 所以 $g'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界, 因而 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上 Lip 连续 $\Longrightarrow$ 一致连续.

总之 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

8. 证明: 若存在 $x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x_0)>f(1)$ 由极限得分离性得存在 $a<x_0<b$ 使得

$$f(x)<f(x_0),\ \text{当}x\in(0,a]\text{或}x\in[b,+\infty)$$

记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M, 则 $M\geq f(x_0)$, 所以 M 也为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

若上述的 $\boldsymbol{x_0}$ 不存在, 则 $\boldsymbol{f(1)}$ 即为 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{(0,+\infty)}$ 上的最大值.

同理可证 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{(0,+\infty)}$ 上有最小值.