（装订线内不要答题）

复旦大学管理学院

2020～2021学年第一学期期末考试试卷

A卷

课程名称：数学分析BI　课程代码：MATH 120016.08

开课院系：管理学院　考试形式：闭卷

姓名：＿＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿＿　专业：＿＿＿＿＿＿

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}(\csc^2 x-\csc^2(x+x^3))$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x$.

(3)$f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x\cdots\sin 10x$, 求高阶导数$f^{(10)}(0)$.

(4)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{\sin x} e^{t^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}\,x}{x-\sin x}$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sqrt{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$.

(2)$\displaystyle\int\sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x$.

(3)$\displaystyle\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x$.

(4)$\displaystyle\int_0^{11\pi} x\sin x\,\mathrm{d}\,x$.

3. (本题10分) 证明当$\boldsymbol{0 < a < b < \pi}$时, 成立不等式:

$$\boldsymbol{b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a}$$

（装订线内不要答题）

4．(本题10分) 设平面有界区域$\boldsymbol{D}$由双曲线$\boldsymbol{y=\frac{1}{x}}$及两条直线$\boldsymbol{y=1}$和$\boldsymbol{x=2}$围成，求$\boldsymbol{D}$绕$\boldsymbol{x}$轴旋转一周所得旋转体的体积.

（装订线内不要答题）

5．（本题10分） 设在$[0,2\pi]$上$f(x)$连续且$\int_0^{2\pi} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x = 0$，证明存在$\xi \in (0,2\pi)$使得:$f(\xi) = 0$.

6．（本题10分） 分别讨论函数$\boldsymbol{f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{10}}$及函数$\boldsymbol{g(x) = \ln(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})}$在$\mathbf{R}$上的一致连续性.

7．(本题10分) 讨论函数$\boldsymbol{y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象.

（装订线内不要答题）

8．(本题10分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上10阶可导, 且 $f(0)=f'(0)=0$, $\forall x>0$成立$0\le f''(x)\le 2$, $g(x)=f(x)+x^2\cos\frac{1}{x}$. 证明:

(1)方程$g(x)=0$在$x\in(0,+\infty)$上有无穷多解;

(2)存在$\xi_1\in(0,+\infty)$使得$g^{(10)}(\xi_1)=0$;

(3)存在$\xi_2\in(0,+\infty)$使得$g^{(8)}(\xi_2)+g^{(10)}(\xi_2)=0$.

（装订线内不要答题）

复旦大学管理学院

2020～2021学年第一学期期末考试试卷

B卷

课程名称：数学分析BI　　课程代码：MATH 120016.08

开课院系：管理学院　　考试形式：闭卷

姓名：________　学号：________　专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x+1}}\right)^{x}$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}\sec^2 x-\csc^2 x\right)$.

(3)$f(x)=\cos x\cos 2x\cos 3x\cdots\cos 11x$, 求高阶导数$f^{(11)}(0)$.

(4)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{\tan x} e^{t^2}\tan t\,\mathrm{d}\,x}{1-\cos x}$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}\,x$.

(2) $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,x$.

(3)$\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}\,x$.

(4)$\displaystyle\int_0^{11\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}\,x$.

（装订线内不要答题）

3．(本题10分) 证明当$x \in (0,1)$时, 成立不等式: $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

4．(本题10分) 设平面有界区域$\boldsymbol{D}$由双曲线$\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$及三条直线$\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{x = 1}$和$\boldsymbol{x = 2}$围成，求$\boldsymbol{D}$绕直线$\boldsymbol{y = 1}$旋转一周所得旋转体的体积.

（装订线内不要答题）

5．(本题10分) 设在$[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$上$\boldsymbol{f(x)}$连续且$\boldsymbol{f(x) \geq 0}$,
若$\displaystyle\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} \boldsymbol{f(x)} \,\mathbf{sin}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{x} \,\mathbf{d}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 证明在$[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$上$\boldsymbol{f(x) \equiv 0}$.

6．（本题10分） 分别讨论函数$\boldsymbol{f(x) = \sin(x^{10})}$及函数$\boldsymbol{g(x) = (\sin x)^{10}}$在$\mathbf{R}$上的一致连续性.

（装订线内不要答题）

7．（本题10分） 讨论函数$\boldsymbol{y=\dfrac{x^2}{x-1}}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象.

8．(本题10分) 设$\boldsymbol{f(x)}$在$[\mathbf{0},+\infty)$上$\mathbf{10}$阶可导，且 $\boldsymbol{f(0)=f'(0)=f''(0)=0}$，$\forall \boldsymbol{x>0}$成立$\boldsymbol{0\le f'''(x)\le 6}$，$\boldsymbol{g(x)=f(x)-x^3\cos\frac{1}{x^2}}$. 证明:

(1)方程$\boldsymbol{g(x)=0}$在$\boldsymbol{x\in(0,+\infty)}$上有无穷多解;

(2)存在$\boldsymbol{\xi_1\in(0,+\infty)}$使得$\boldsymbol{g^{(10)}(\xi_1)=0}$;

(3)存在$\boldsymbol{\xi_2\in(0,+\infty)}$使得$\boldsymbol{g^{(10)}(\xi_2)=g^{(9)}(\xi_2)}$.

A卷答案

1. (1)2; (2)1; (3)$(10!)^2$; (4)1.

2. (1)$\frac{2}{3}(x+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}+C$; (2)$2\sqrt{1+e^x}+\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$; (3)$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; (4)$11\pi$.

3.

证明: 令$f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$, 只要证明$f'(x)>0$即可.

$$\begin{aligned} &f'(x)=x\cos x-\sin x+\pi\\ &f''(x)=-x\sin x<0\\ &f'(x)>f'(\pi)=0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} V=&\pi-\pi\int_1^2\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x\\ =&\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

5.证法一:反证法, 不然不妨设$f(x)>0$当$\xi\in(0,2\pi)$. 则$f(x)\sin^2 x\geq 0$
且$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x=0$, 由书上习题3.1/10(2)知$f(x)\sin^2 x\equiv 0$,
所以$f(x)\equiv 0$当$x\neq\pi$矛盾.

证法二:我们证明：存在$\xi\in(0,2\pi)$且$x\neq\pi$, 使得$f(\xi)=0$.
反证法, 不然不妨设$f(x)>0$当$\xi\in(0,2\pi)$且$x\neq\pi$. 记$f(x)$在$[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$上的最小值为$m$, 显然$m>0$, 所以

$$\begin{aligned} 0=\int_0^{2\pi}f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x&\geq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x\\ &\geq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}m\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\sqrt{2}}{4}m\pi>0 \end{aligned}$$

矛盾.

6.函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上不是一致连续的. $\forall\delta>0$

$$\begin{aligned} &|f(x+\delta)-f(x)|=|f'(\xi)|\delta\\ &f'(\xi)=1+2\xi+\cdots+10\xi^9\to\infty,\quad(x\to\infty) \end{aligned}$$

函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上是一致连续的.

$$|g'(x)|=\frac{1+2x+\cdots+10x^9}{1+x+x^2+\cdots+x^{10}}\to 0,\quad(x\to\infty)$$

所以$g'(x)$有界, 记$|g'(x)|\le M$, 则

$$|g(x_2)-g(x_1)|=|g'(\xi)(x_2-x_1)|\le M|x_2-x_1|$$

7.$y'=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$, $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$.
所以拐点: $x=0$, 极小值点$x=3$
斜渐近线$y=x+2$, 垂直渐近线$x=1$.
8.(1)由$f''(x)\ge 0$知, $f'(x)\ge f'(0)=0$, 所以$f(x)\ge f(0)=0$.
同理, 由$f''(x)\le 2$, $(f(x)-x^2)''\le 0$, 可推出$f(x)-x^2\le 0$.
$\forall k\in \mathbf{Z}$, $g(\frac{1}{2k\pi})=f(\frac{1}{2k\pi})+(\frac{1}{2k\pi})^2\ge 0$, $g(\frac{1}{(2k+1)\pi})=f(\frac{1}{(2k+1)\pi})-(\frac{1}{(2k+1)\pi})^2\le 0$.
所以存在$\xi_k\in[\frac{1}{(2k+1)\pi},\frac{1}{2k\pi}]$, 使得$g(\xi_k)=0$. 即$g(x)=0$在$x>0$中有无穷多解.
由$Rolle$定理知$g'(x)=0$在$x>0$中也有无穷多解.
依此类推, 知$g^{(10)}(x)=0$在$x>0$中也有无穷多解.
(2)

$$h(x)\triangleq g(x)+g''(x)=f(x)+f''(x)+(x^2+2-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x}$$

$$h(\frac{1}{2k\pi})\to-\infty$$

$$h(\frac{1}{(2k+1)\pi})\to+\infty$$

所以$h(x)=0$在$x>0$有无穷多解. 因而$h^{(8)}(x)=0$在$x>0$也有无穷多解.

B卷答案

1. (1)$\mathbf{1}$; (2)$\frac{2}{3}$; (3)$\mathbf{0}$; (4)$\mathbf{1}$.

2. (1)$\tan x - x + C$; (2)$-\cos(x - \frac{1}{x}) + C$; (3)$x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$; (4)$121\pi$.

3. 略

4.

$$
\begin{aligned}
V =& \pi - \pi\int_1^2 (1 - \frac{1}{x})^2 \,\mathrm{d}\,x \\
=& (2\ln 2 - \frac{1}{2})\pi
\end{aligned}
$$

5.证法一:$f(x)\sin^2 x \geq 0$ 且$\int_0^{2\pi} f(x)\sin^2 x \,\mathrm{d}\,x = 0$, 由书上习题3.1/10(2)知$f(x)\sin^2 x \equiv 0$, 所以$f(x) \equiv 0$当$x \neq \pi$,由连续性知: $f(\pi) = 0$.

证法二:先证$g(x) = f(x)\sin^2 x \equiv 0$. 反证法, 不然不妨设存在$x_0 \in (0, 2\pi)$使得$g(x_0) > 0$, 存在 $\delta \in (0, \min(x_0, 2\pi - x_0))$使得$g(x) \geq \dfrac{1}{2}g(x_0)$当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 所以

$$
0 = \int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)\,\mathrm{d}\,x \geq g(x_0)\delta > 0
$$

矛盾.

所以当$x \in (0, 2\pi)\backslash\{\pi\}$时, $f(x) \equiv 0$, 由连续性知: $f(\pi) = 0$.

6.函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上不是一致连续的. $\forall n > 0$

$$
f(\sqrt[10]{2n\pi + 1}) - f(\sqrt[10]{2n\pi})| = \sin 1 \not\to 0
$$

函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上是一致连续的.

$$
g'(x) = 10(\sin x)^9 \cos x
$$

所以$g'(x)$有界, 记$|g'(x)| \leq M$, 则

$$
|g(x_2) - g(x_1)| = |g'(\xi)(x_2 - x_1)| \leq M|x_2 - x_1|
$$

7.略.

8.由$f'''(x) \geq 0$知, $f''(x) \geq f''(0) = 0$, $f'(x) \geq f'(0) = 0$,所以$f(x) \geq f(0) = 0$..

同理, 由$f'''(x) \leq 6$, $(f(x) - x^3)''' \leq 0$, 可推出$f(x) - x^3 \leq 0$.

$\forall k \in \mathbf{Z}$, $g(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}) + (\frac{1}{\sqrt{2k\pi}})^3 \geq 0$, $g(\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}) = f(\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}) - (\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}})^3 \leq 0$,

所以存在$\boldsymbol{\xi_k} \in [\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}]$, 使得$g(\xi_k) = 0$. 即$g(x) = 0$在$x > 0$中有无穷多解.
由$Rolle$定理知$g'(x) = 0$在$x > 0$中也有无穷多解.
依此类推, 知$g^{(10)}(x) = 0$在$x > 0$中也有无穷多解.
由$Rolle$定理知$(e^{-x}g^{(9)}(x))' = 0$在$x > 0$中也有无穷多解.