复旦大学管理学院

2020～2021学年第一学期期中考试试卷(共8页)

课程名称：数学分析BI　课程代码：MATH 20016.06

开课院系：管理学院　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共5小题，每小题5分，共20分)

(1)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+4+6+\cdots+2n}-n\right)$.

(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^{2020}+3^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(3)求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin(2\sqrt[3]{x^2-1})}$.

(4)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

2．(本题共5小题，每小题5分，共20分)

(1)设$\boldsymbol{f(x) = \sin(\sin(\sin x))}$, 求$\boldsymbol{f'(x)}$.

(2)设$\boldsymbol{f(x) = \arctan\Big(\ln\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)\Big)}$, 求$\boldsymbol{f'(x)}$.

(3)求螺旋线$\boldsymbol{\begin{cases} x = t\cos(\pi t) \\ y = t\sin(\pi t) \end{cases}}$, 在$\boldsymbol{t = 1}$处的切线方程.

(4)设$\boldsymbol{f(x) = \sin^2 x}$, 求$\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$.

3. (本题10分) 证明$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$, 其中$[x]$为$x$的取整函数.

4．(本题10分) 设$\boldsymbol{x_n}$满足$\boldsymbol{x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)}$, $\boldsymbol{n \geq 1}$, 常数$\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{x_1 > 0}$. 证明$\boldsymbol{\{x_n\}}$收敛，并求出其极限.

5. (本题10分) 设$\boldsymbol{f(x)}$在$\mathbb{R}$上连续, 且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = f(-\infty)$及$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$均收敛, 证明$\boldsymbol{f(x)}$在$\mathbb{R}$上有界.

6．(本题10分) 设常数$\boldsymbol{a, b, c > 0}$, 证明下面的方程分别在$\boldsymbol{x \in (1, 2)}$及$\boldsymbol{x \in (2, 3)}$内有解:

$$\boldsymbol{\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-2)^3} + \frac{c}{(x-3)^3} = 0}$$

7．(本题10分) 问$\sin(x^2)$及$\sin^2 x$在$\mathbb{R}$上分别是否一致连续.

8．(本题10分) 设$\boldsymbol{f(x)}$在$\mathbb{R}$上连续,证明$\boldsymbol{f(\sin x)}$在$\mathbb{R}$上一致连续.

参考答案：

1/(1)$\frac{1}{2}$;(2)1;(3)$\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$;(4)$\frac{3}{2}$.

2/(1)$\cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x$; (2)$\frac{1}{(1+\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}))\sqrt{1+x^2}}$; (3)$y=\pi(x+1)$; (4)$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$, $f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin(2x+(n-1)\frac{\pi}{2})$.

3. 证法一：$[x]\le x\le [x]+1$.

(1)$x>0$时: $1-\frac{1}{x}\le\frac{[x]}{x}\le 1$ 所以$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$;

(2)$x<0$时: $1\le\frac{[x]}{x}\le 1-\frac{1}{x}$ 所以$\lim_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=1$;

因而$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$.

证法2：$x=[x]+(x)$, $\left|\frac{[x]}{x}-1\right|=\left|\frac{(x)}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|$.

所以$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$.

4.证：易证$n>1$时$\sqrt[3]{a}\le x_n$.

因而$n>1$时$x_{n+1}-x_n=\frac{a-x_n^3}{3x_n^2}\le 0$.

所以$n>1$时x_n单调下降有下界, 必收敛.

记$\lim_{n\to\infty}x_n=A$, 则A满足$A=\frac{1}{3}(2A+\frac{a}{A^2})$, $A=\sqrt[3]{a}$.

5.证法一: 反证法: 不然存在极大化序列x_n使得$|f(x_n)|\to+\infty$.

(1)若x_n有界, 则存在收敛子列, 记为$x_{n_k}\to x_0$, 则由Heine定理$f(x_{n_k})\to f(x_0)$, 此与$|f(x_n)|\to+\infty$矛盾.

(2)若x_n无界, 不妨设无上界, 则存在子列$x_{n_k}\to+\infty$, 则由Heine定理$f(x_{n_k})\to f(+\infty)$, 此与$|f(x_n)|\to+\infty$矛盾.

证法二:根据收敛必有界知, 存在$X_1, X_2 > 0$使得$f(x)$在$(-\infty, X_1)$及$(X_2, +\infty)$上分别有界, 记它们的界(绝对值的上界)分别为M_1, M_2. 在$[-X_1, X_2]$上连续函数必有界, 记其为M_3, 则取$M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$, 则$|f(x)| \le M$.

6. 证明：记$f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x-2)^3} + \dfrac{c}{(x-3)^3}$, 则$f(1+0) = +\infty$,$f(2-0) = -\infty$, $f(2+0) = +\infty$, $f(3-0) = -\infty$.

显然零点存在定理可以推广如下:

设$f(x)$在(a,b)上连续, 且$f(a+0)$与$f(b-0)$异号(或为异号无穷大), 则存在$\xi \in (a,b)$使得$f(\xi) = 0$.

此证明略.

7.解:$|\sin^2 x_1 - \sin^2 x_2| = |(\sin x_1 - \sin x_2)(\sin x_1 + \sin x_2)| \le 2|x_1 - x_2|$, 所以它在$\mathbb{R}$上一致连续.

取$x_n^1 = \sqrt{2n\pi}$, $x_n^2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. 容易验证$x_n^2 - x_n^1 \to 0$, 但是 $\sin(x_n^2)^2 - \sin(x_n^1)^2 = 1 \not\to 0$. 所以$\sin x^2$在$\mathbb{R}$上非一致连续.

8. 证明：按定义证明: $\forall \varepsilon > 0$, 因为$f(x)$在$[-1,1]$上连续所以一致连续, $\exists \delta_1 > 0$使得$|x_1 - x_2| < \delta_1$且 $x_1, x_2 \in [-1,1]$时

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \delta_1$$

因为$\sin x$在$\mathbb{R}$上一致连续, $\exists \delta > 0$使得$|x_1 - x_2| < \delta$时

$$|\sin x_1 - \sin x_2| < \delta_1$$

所以此时有

$$|f(\sin x_1) - f(\sin x_2)| < \varepsilon$$

因而函数$f(\sin x)$在$\mathbb{R}$上一致连续.