（装订线内不要答题）

复旦大学管理学院

2019～2020学年第一学期期末考试试卷

A卷

课程名称：数学分析BI 课程代码：MATH 120016.08

开课院系：管理学院 考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$.

(3)$f(x)=e^x\sin x$, 求高阶导函数$f^{(4)}(x)$.

(4)求导函数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int_{x-1}^{x+1}|t|\,\mathrm{d}\,t$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

(2)$\int\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}\,x$.

(3)$\int_0^{\pi}(\sin^3 x+\cos^3 x)\,\mathrm{d}\,x$.

(4)$\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}\,x$.

（装订线内不要答题）

3．（本题10分） 设$\boldsymbol{f(x)} = \displaystyle\int_{\mathbf{0}}^{\cos x} \boldsymbol{e^{-t^2}\cos t\,\mathrm{d}\,t}$, 求$\boldsymbol{f(x)}$的极值点，并说明是极大值点还是极小值点.

4．(本题10分) 设平面有界区域$\boldsymbol{D}$由抛物线$\boldsymbol{y^2 = 2x}$与直线$\boldsymbol{y = -2x + 2}$围成，求$\boldsymbol{D}$绕直线$\boldsymbol{y = -2}$旋转一周所得旋转体的体积.

（装订线内不要答题）

5.（本题10分） 证明：当$x \in (0, \frac{\pi}{2})$时成立不等式：$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$

6．(本题10分) 分别讨论函数$\boldsymbol{f(x) = x+\frac{\sin(x^4)}{x}}$及函数$\boldsymbol{g(x) = x^{1+\frac{\sin(x^4)}{x^2}}}$在$\boldsymbol{(0,+\infty)}$上的一致连续性.

（装订线内不要答题）

7. (本题10分) 关于参数$\boldsymbol{k} \in \mathbf{R}$讨论下述方程解的个数：

$$\arctan \boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

8．(本题10分) 设$\boldsymbol{f(x)}$在$[\boldsymbol{0,1}]$上二阶可导，且 $\boldsymbol{f(0)=0}$，$\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}\,x=0}$，$\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{xf(x)\,\mathrm{d}\,x=0}$. 证明：

(1)$\exists \boldsymbol{0<\xi_1<\xi_2<1}$, 使$\boldsymbol{f(\xi_1)=0}$, $\boldsymbol{f(\xi_2)=0}$;

(2)$\exists \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{(0,1)}$, 使$\boldsymbol{f''(\eta)=0}$;

(3)$\exists \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{(0,1)}$, 使$\boldsymbol{f''(\tau)+f'(\tau)=0}$.

(注：本题的3小题可分开解答、独立给分)

复旦大学管理学院

2019～2020学年第一学期期末考试试卷

B卷

课程名称： 数学分析BI 课程代码： MATH 120016.08

开课院系： 管理学院 考试形式：闭卷

姓名： ________ 学号： ________ 专业： ________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

（装订线内不要答题）

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t}{x^2}$.

(3)$f(x)=e^x\cos x$，求高阶导函数$f^{(4)}(x)$.

(4)求导函数$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1}|t-x|\,\mathrm{d}\,t$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\displaystyle\int\frac{1+x^2}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$.

(2)$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}\,x$.

(3)$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x$.

(4)$\displaystyle\int_1^4\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$.

（装订线内不要答题）

3.（本题10分） 设$\boldsymbol{f(x)=\int_0^{\cos x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t}$, 求$\boldsymbol{f(x)}$的极值点，并说明是极大值点还是极小值点.

4．(本题10分) 设平面有界区域$\boldsymbol{D}$由抛物线$\boldsymbol{y^2 = 2x}$与直线$\boldsymbol{y = -2x + 2}$围成，求$\boldsymbol{D}$绕直线$\boldsymbol{y = 1}$旋转一周所得旋转体的体积.

5．(本题10分) 证明：当$x>-1$且$x\neq 0$时成立不等式：$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

（装订线内不要答题）

6．(本题10分) 分别讨论函数$\boldsymbol{f(x)=x+\ln(1+x)}$及函数$\boldsymbol{g(x)=x^{1+\frac{1}{x}}}$在$\boldsymbol{(0,+\infty)}$上的一致连续性.

（装订线内不要答题）

7. (本题10分) 关于参数$\boldsymbol{k} \in \mathbf{R}$讨论下述方程解的个数：

$$\frac{\arctan \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{k}$$

8．(本题10分) 设$\boldsymbol{f(x)},\boldsymbol{g(x)}$在$[\mathbf{0},\mathbf{1}]$上二阶可导, 且 $\boldsymbol{f(0)=g(0)}$, $\boldsymbol{f(1)=g(1)}$，$\boldsymbol{f(x)},\boldsymbol{g(x)}$在$[\mathbf{0},\mathbf{1}]$上有相等的正的最大值. 证明：

(1)$\exists\boldsymbol{\xi}\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$, 使$\boldsymbol{f(\xi)=g(\xi)}$;

(2)$\exists\boldsymbol{\eta}\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$, 使$\boldsymbol{f''(\eta)=g''(\eta)}$;

(3)$\exists\boldsymbol{\tau}\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$, 使$\boldsymbol{f''(\tau)+f'(\tau)=g''(\tau)+g'(\tau)}$.

(注：本题的3小题可分开解答、独立给分)

A卷答案

1. (1)$\dfrac{2}{3}$; (2)$\dfrac{2}{e}$; (3)$-4e^{x}\sin x$; (4)$|x+1|-|x-1|$.

2. (1)$x+\ln(1+x^2)+C$; (2)$(1-x)(\dfrac{2}{3}\sqrt{x-1}-1)+C$; (3)$\dfrac{4}{3}$; (4)$2\arctan 2-\dfrac{\pi}{2}$.

3. 由$f'(x)=-\cos(\cos x)\sin x e^{-\cos^2 x}=0$, 解得$x_k=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\dots$.
$f''(x)=-\big(2\cos(\cos x)\cos x\sin^2 x+\sin(\cos x)\sin^2 x+\cos(\cos x)\cos x\big)e^{-\cos^2 x}$,

$f''(x_k)=(-1)^{k-1}\cos 1 e^{-1}$, 所以当$k$为奇数时，$x_k$为极小值点；当$k$为偶数时，$x_k$为极大值点.

4.

$$
\begin{aligned}
V=&\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\big((\sqrt{2x}+2)^2-(-\sqrt{2x}+2)^2\big)\,\mathrm{d}\,x+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\big((-2x+2+2)^2-(-\sqrt{2x}+2
\\
=&\pi\int_0^{\frac{1}{2}}8\sqrt{2x}\,\mathrm{d}\,x+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\big(12+4\sqrt{2x}-18x+4x^2\big)\,\mathrm{d}\,x\\
=&\pi(\frac{8}{3}+18+\frac{28}{3}-9\times\frac{15}{4}+\frac{63}{6})\\
=&\frac{27\pi}{4}
\end{aligned}
$$

5.证明一：令$f(x)=\tan x\sin x-x^2$, 则

$$
\begin{aligned}
f'(x)=&\sec^2 x\sin x+\tan x\cos x-2x\\
=&\frac{\tan x}{\cos x}+\tan x\cos x-2x\\
=&\tan x\big(\frac{1}{\cos x}+\cos x\big)-2x
\end{aligned}
$$

所以, 当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时：

$$
\begin{aligned}
f'(x)=&2\tan x-2x=2(\tan x-x)>0\\
f(x)>&f(0)=0
\end{aligned}
$$

证明二：令$f(x)=\tan x\sin x-x^2$, 则

$$
\begin{aligned}
f'(x)=&\sec^2 x\sin x+\tan x\cos x-2x\\
f''(x)=&2\sec^2 x\tan x\sin x+\sec^2 x\cos x+\sec^2 x\cos x-\tan x\sin x-2\\
=&\frac{1}{\cos^3 x}\big(2\sin^2 x+2\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x-2\cos^3 x\big)\\
=&\frac{1}{\cos^3 x}\big(\sin^2 x(2-\cos^2 x)+2\cos^2 x(1-\cos x)\big)>0
\end{aligned}
$$

所以, 当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时：

$$
f'(x)>f'(0)=0
$$

所以, 当$x \in (0, \frac{\pi}{2})$时：

$$f(x) > f(0) = 0$$

6.函数$f(x) = x + \dfrac{\sin(x^4)}{x}$及函数$g(x) = x^{1+\frac{\sin(x^4)}{x^2}}$在$(0, +\infty)$上都是一致连续的.
首先$f(0+0) = g(0+0) = 0$;
其次，考察$f(x) - x$在$x \to +\infty$的情况：

$$f(x) - x = \frac{\sin(x^4)}{x} \to 0$$

所以在$x \in (0, +\infty)$上$f(x) - x$一致连续, 因而$f(x)$也一致连续.
接着考察$g(x)$在$x \to +\infty$的情况：

$$\begin{aligned} g(x) - x &= x\left(e^{\frac{\cos(x^4)}{x^2}\ln x} - 1\right) \\ &\sim x\frac{\cos(x^4)}{x^2}\ln x = \frac{\cos(x^4)}{x}\ln x \to 0 \end{aligned}$$

所以在$x \in (0, +\infty)$上$g(x) - x$一致连续, 因而$g(x)$也一致连续.
7.(1)$y = \arctan x$和$y = kx$都是奇函数，且都过原点.
(2)$y = \arctan x$在$x > 0$时是上凸函数， $y = \dfrac{\pi}{2}$是水平渐近线， $y = x$是其在原点的切线.
(3)综合上述两点可知：
(A)$0 < k < 1$时有三个解(交点);
(B)$k \le 0$或$k \ge 1$时有一个解(交点).
8. (1)证明$f(x) = 0$在$x \in (0, 1)$上至少有两个解：
反证法：不然$f(x) = 0$在$x \in (0, 1)$要么无解、要么只有一个解.
因为$f(x)$是连续函数，假如$f(x) = 0$无解，可不妨设$f(x) > 0$, 则

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x > 0$$

此与题设条件矛盾.
假如$f(x) = 0$只有一个解$\xi_1 \in (0, 1)$，则在$x \in (0, 1)\setminus\{\xi_1\}$上$f(x) \neq 0$, 可不妨设在$x \in (0, \xi_1)$上$f(x) > 0$:
若在$x \in (\xi_1 1)$上也成立$f(x) > 0$: 则

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x > 0$$

此与题设条件矛盾.

若在$\boldsymbol{x \in (\xi_1, 1)}$上成立$\boldsymbol{f(x) < 0}$:
则在$\boldsymbol{x \in (0,1) \backslash \{\xi_1\}}$上$\boldsymbol{f(x)(x_1 - x) > 0}$, 则，一方面

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)(x_1 - x)\,\mathrm{d}\,x > 0}$$

另一方面

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)(x_1 - x)\,\mathrm{d}\,x = x_1 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0}$$

仍然矛盾.
(2)由Roll定理：$\boldsymbol{\exists t_1 \in (0, \xi_1) \subset (0,1), t_2 \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,1)}$使得：

$$\boldsymbol{f'(t_1) = f'(t_2) = 0}$$

所以存在$\boldsymbol{\eta \in (t_1, t_2) \subset (0,1)}$, 使得

$$\boldsymbol{f''(\eta) = 0}$$

(3)令$\boldsymbol{p(x) = e^x f'(x)}$, 则$\boldsymbol{p(t_1) = p(t_2) = 0}$, 存在$\boldsymbol{\tau \in (t_1, t_2) \subset (0,1)}$, 使得

$$\boldsymbol{p'(\tau) = 0 \Rightarrow f''(\tau) + f'(\tau) = 0}$$

B卷答案

1\. (1)$\frac{1}{3}$; (2)$\frac{1}{2e}$; (3)$-4e^x\cos x$; (4)0.

2\. (1)$\frac{1}{2}x^2-x+2\ln|1+x|+C$; (2)$2\sqrt{x+1}-2\ln(1+\sqrt{x+1})+C$; (3)$\frac{2}{3}$; (4)$2+\frac{\pi}{2}-2\arctan 2$.

3\. 由$f'(x)=-\sin xe^{-\cos^2 x}=0$, 解得$x_k=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$.
$f''(x)=-\big(2\cos x\sin^2 x+\cos x\big)e^{-\cos^2 x}$,
$f''(x_k)=(-1)^{k-1}e^{-1}$, 所以当$k$为奇数时，$x_k$为极小值点；当$k$为偶数时，$x_k$为极大值点.

4\.

$$\begin{aligned}V=&\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\big((-\sqrt{2x}-1)^2-(\sqrt{2x}-1)^2\big)\,\mathrm{d}\,x+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\big((-\sqrt{2x}-1)^2-(-2x+2-1)^2\big)\,\mathrm{d}\,x\\=&\pi\int_0^{\frac{1}{2}}4\sqrt{2x}\,\mathrm{d}\,x+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\big(2\sqrt{2x}+6x-4x^2\big)\,\mathrm{d}\,x\\=&\pi(\frac{4}{3}+\frac{14}{3}+3\times\frac{15}{4}-\frac{63}{6})\\=&\frac{27\pi}{4}\end{aligned}$$

5.证明一：令$f(x)=\ln(1+x)$, 则

$$\ln(1+x)=f(x)-f(0)=\frac{1}{1+\xi}x$$

其中, 当$x>0$时$\xi\in(0,x)$：

$$\frac{x}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}x<x$$

当$-1<x<0$时$\xi\in(-x,0)$,仍然有：

$$\frac{x}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}x<x$$

证明二：令$f(x)=\ln(1+x)-x$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$$

当$x>0$时：

$$f'(x)<0$$

当$-1 < x < 0$时：

$$f'(x) > 0$$

所以，$f(0)$是最小值，当$x > -1$且$x \neq 0$时：

$$f(x) > f(0) = 0$$

证明二：令$g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$，则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

当$x > 0$时：

$$g'(x) > 0$$

当$-1 < x < 0$时：

$$g'(x) < 0$$

所以，$g(0)$是最小值，当$x > -1$且$x \neq 0$时：

$$g(x) > g(0) = 0$$

6.函数$f(x) = x + \ln(1+x)$及函数$g(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$在$(0, +\infty)$上都是一致连续的.
首先$f(0+0) = g(0+0) = 0$;
其次，考察$f(x)$在$x \to +\infty$的情况：

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$$
$$f'(+\infty) = 1$$

所以在$x \in [1, +\infty)$上$f'(x)$有界，所以$f(x)$在$x \in (0, +\infty)$上一致连续.
接着考察$g(x)$在$x \to +\infty$的情况：

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{(1+\frac{1}{x})\ln x} \\ g'(x) &= e^{(1+\frac{1}{x})\ln x}\left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\ln x}{x} + 1 + \frac{1}{x}\right) \\ g'(+\infty) &= 1 \end{aligned}$$

所以在$x \in [1, +\infty)$上$g'(x)$有界，所以$g(x)$在$x \in (0, +\infty)$上一致连续.

7.(1)$\boldsymbol{y = \frac{\arctan x}{x}}$是偶函数，$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} y = 1}$.

(2)$\boldsymbol{y' = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+\xi^2}}{x^2}}$在$\boldsymbol{x > 0}$时是严格单调下降函数，$\boldsymbol{y(\infty) = 0}$.

(3)综合上述两点可知：

(A)$\boldsymbol{0 < k < 1}$时有两个解(交点)；

(B)$\boldsymbol{k \leq 0}$或$\boldsymbol{k \geq 1}$时无解(交点).

8.(1)若$\boldsymbol{f(x), g(x)}$在同一点达到最大值(且为正的)，则可取$\boldsymbol{\xi \in (0,1)}$为此最大值点; 若$\boldsymbol{f(x), g(x)}$在不同的点达到最大值(且为正的)，记为$\boldsymbol{x_1, x_2 \in (0,1)}$, $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$, 令$\boldsymbol{h(x) = f(x) - g(x)}$, 则

$$\boldsymbol{h(x_1)h(x_2) < 0}$$

所以存在$\boldsymbol{\xi \in (x_1, x_2) \subset (0,1)}$使得

$$\boldsymbol{h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = g(\xi)}$$

(2)由Roll定理：$\boldsymbol{\exists t_1 \in (0,\xi) \subset (0,1), t_2 \in (\xi,1) \subset (0,1)}$使得：

$$\boldsymbol{h'(t_1) = h'(t_2) = 0}$$

所以存在$\boldsymbol{\eta \in (t_1, t_2) \subset (0,1)}$, 使得

$$\boldsymbol{h''(\eta) = 0 \Rightarrow f''(\eta) = g''(\eta)}$$

(3)令$\boldsymbol{p(x) = e^x h'(x)}$, 则$\boldsymbol{p(t_1) = p(t_2) = 0}$, 存在$\boldsymbol{\tau \in (t_1, t_2) \subset (0,1)}$, 使得

$$\boldsymbol{p'(\tau) = 0 \Rightarrow f''(\tau) + f'(\tau) = g''(\tau) + g'(\tau)}$$