复旦大学管理学院

2019～2020学年第一学期期中考试试卷(共6页)

课程名称：数学分析BI　　课程代码：MATH 20016.06

开课院系：管理学院　　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得　分								

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共5小题，每小题5分，共25分)

(1)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}\right)^n$.

(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{2}{2^{n+2}}+\dfrac{3}{2^{n+3}}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n+n}}\right)$.

(3)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-(1+x^2)}{\tan^2 x-\sin^2 x}$.

(4)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4-x^2-1}\right)$.

(5)求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\right)\sqrt{x^3}$.

2．(本题共5小题，每小题5分，共25分)

(1)设$f(x)=\arcsin(\sin x)$, 求$f'(x)$.

(2)设$f(x)=(2+e^x)^{\cos x}$, 求$f'(x)$.

(3)设隐函数$y=y(x)$满足方程$xy+e^y=x+1$, 求$y''(0)$.

(4)设$\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

(5)设$f(x)=x^2\ln x$, 求$f^{(n)}(x)$.

3．（本题10分）设n次多项式$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$满足：$a_n \neq 0$且$n$为奇数，证明方程$p(x) = 0$必有实数根.

4．（本题10分）设x_n满足$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$, $n \geq 1$, $0 < x_1 < 3$. 证明$\{x_n\}$收敛，并求出其极限.

5．(本题10分) 设$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$，求常数$a$满足的条件，使$f(x)$处处可导，且$f'(x)$处处连续.

6．(本题10分) 问函数$\boldsymbol{f(x) = x\ln x}$及函数$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x\ln(x^2+x+1) - x\ln(x+1)}$，在$\boldsymbol{(0,+\infty)}$上是否分别一致连续？说明理由.

7. (本题10分)证明有界闭区间上的连续函数必是有界函数.

参考答案:

1/(1)$\frac{1}{e}$;(2)0;(3)$-\frac{1}{2}$;(4)1;(5)$\frac{1}{2}$.

2/(1)$\frac{\cos x}{|\cos x|}$; (2)$(2+e^x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln(2+e^x)+\cos x\frac{e^x}{2+e^x}\right)$; (3)$y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-3$; (4)$\frac{\pi}{4}$; (5)$f'(x)=2x\ln x+x$, $f''(x)=2\ln x+3$, $f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}2(n-3)!}{x^{n-2}}$, $n\geq 3$.

3. 证：不妨设$a_n=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{x^n}=1$, 所以 $p(+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{x^n}x^n=+\infty$, $p(-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{x^n}x^n=-\infty$.

由 $p(+\infty)=+\infty$可知，存在x_1使得$f(x_1)>0$; 同理，由 $p(-\infty)=-\infty$可知，存在x_2使得$f(x_2)<0$. 因而由零点存在定理，存在$\xi\in[x_1,x_2]$（或$\xi\in[x_2,x_1]$）使得:

$$f(\xi)=0$$

即方程$f(x)=0$有实数根.

4.证：易证： $0<x_n<3$，因而$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leq\frac{x_n+3-x_n}{2}=\frac{3}{2}$, 即当$n>1$时：$x_n\leq\frac{3}{2}$,此时

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n(3-x_n)-x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geq 0$$

所以，当$n>1$时，x_n单调上升有上界，因而x_n收敛.

记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则$A$满足$A=\sqrt{A(3-A)}$, $A=0,\frac{3}{2}$, 由$n>1$时，x_n单调上升可知: $A\geq x_2>0$, 所以: $A=\frac{3}{2}$.

5.解：(1)先考察连续性，当$x\neq 0$时，$f(x)$为初等函数，连续；当$x=0$时：

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|^a\sin\frac{1}{x^2}=\begin{cases}\text{不存在,} & a\leq 0\\ 0, & a>0\end{cases}$$

所以当且仅当$a>0$时，$f(x)$在$x=0$处连续，因而处处连续;

(2)再考察可导性，当$x \neq 0$时，

$$f'(x) = \operatorname{sign}(x) a|x|^{a-1} \sin\frac{1}{x^2} - 2|x|^{a-3}\cos\frac{1}{x^2}$$

当$x = 0$时：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}|x|^{a-1}\sin\frac{1}{x^2} = \begin{cases}\text{不存在，} & a \leq 1\\ 0, & a > 1\end{cases}$$

所以当且仅当$a > 1$时，$f(x)$在$x = 0$处可导，因而处处可导;

(3)最后考察$f'(x)$的连续性，当$x \neq 0$时，$f'(x)$为初等函数，连续；当$x = 0$时：

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sign}(x) a|x|^{a-1}\sin\frac{1}{x^2} - 2|x|^{a-3}\cos\frac{1}{x^2}\right) = \begin{cases}\text{不存在，} & 1 < a \leq 3\\ 0 = f'(0), & a > 3\end{cases}$$

所以当且仅当$a > 3$时，$f'(x)$在$x = 0$处连续，因而处处连续.

6.解：(1) 取$x_n = n$, $\tilde{x}_n = n + \dfrac{1}{\ln n}$, 则

$$\begin{aligned} &f(n+\frac{1}{\ln n}) - f(n) = n\ln(1+\frac{1}{n\ln n}) + \frac{\ln(n+\frac{1}{\ln n})}{\ln n}\\ >&n\ln(1+\frac{1}{n\ln n}) + 1 \to 1 \neq 0\end{aligned}$$

所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上非一致连续.

(2)当$x \to +\infty$时

$$g(x) = \frac{1}{2}x\ln\left(1-\frac{x}{(x+1)^2}\right) \sim -\frac{1}{2}x\frac{x}{(x+1)^2} \to -\frac{1}{2}$$

所以$g(+\infty) = -\dfrac{1}{2}$, 显然$g(0+0) = 0$, 所以函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上一致连续.

7.证明略