复旦大学管理学院

2018～2019学年第一学期期末考试试卷

A卷(共7页)

课程名称：______数学分析BI______ 课程代码：______MATH 20016.10______

开课院系：______管理学院______ 考试形式：闭卷

姓名：__________________ 学号：__________________ 专业：__________________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n+1}}\right)^n$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$.

(3)$f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x\cdot\cdots\cdot\sin 2019x$, 求高阶导数$f^{(2019)}(0)$.

(4)设$\boldsymbol{y=y(x)}$满足方程$\boldsymbol{xy+2\ln x=y^4+\ln y}$, 求$\boldsymbol{y''(1)}$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\displaystyle\int(\sin x-\cos^2 x)e^{\sin x}\,\mathrm{d}\,x$.

(2)$\displaystyle\int\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

(3)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,\mathrm{d}\,x$.

(4)$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,\mathrm{d}\,x$.

3．(本题10分) 设$\boldsymbol{L}$是曲线$\boldsymbol{y = e^x}$的切线且$\boldsymbol{L}$过原点，平面有界区域$\boldsymbol{D}$由曲线$\boldsymbol{y = e^x}$与直线$\boldsymbol{L}$及$\boldsymbol{y}$轴围成，求$\boldsymbol{D}$绕$\boldsymbol{x}$轴旋转一周所得旋转体的体积.

4．(本题10分) 证明：当$\boldsymbol{x \in (0, \frac{\pi}{2})}$时成立不等式：$\boldsymbol{\sin x > \frac{2}{\pi} x}$

5．(本题10分) 分别讨论函数$\mathbf{ln}(\boldsymbol{e^x} + \mathbf{ln}^2 \boldsymbol{x})$在$(\mathbf{0}, \mathbf{1}]$及$[\mathbf{1}, +\infty)$上的一致连续性.

6. (本题10分) 讨论函数$\boldsymbol{y = \frac{\ln(x^2)}{x}}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7．（本题10分） 设$\boldsymbol{f(x)}$在$[\mathbf{0},\mathbf{1}]$上二阶可导, 且 $\boldsymbol{f(0)=f'(0)=1}$, $\boldsymbol{f(1)=2}$, 证明：

(1)$\exists\boldsymbol{\xi}\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$, 使$\boldsymbol{f'(\xi)=1}$;

(2)$\exists\boldsymbol{\eta}\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$, 使$\boldsymbol{f''(\eta)=0}$;

(3)$\exists\boldsymbol{\tau}\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$, 使$\boldsymbol{f''(\tau)+f'(\tau)=1}$.

8. (本题10分) (1)求$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\ln x}{x}}$的最值; (2)设数列$\boldsymbol{\{a_n\}}$满足$\boldsymbol{\ln(a_{n+1}) > \dfrac{a_n}{e}}$, $\boldsymbol{n = 1, 2, \ldots}$, 证明数列$\boldsymbol{\{\arctan a_n\}}$收敛并求极限.

复旦大学管理学院

2018～2019学年第一学期期末考试试卷

B卷(共7页)

课程名称：数学分析BI 课程代码：MATH120016.10

开课院系：管理学院 考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n+1}}\right)^{n^3}$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

(3)$f(x)=\cos x\cos 2x\cos 3x\cdot\cdots\cdot\cos 2019x$, 求高阶导数$f^{(2019)}(0)$.

(4)设$\boldsymbol{y=y(x)}$满足方程$\boldsymbol{\frac{x}{y}+2\ln x=y^4}$, 求$\boldsymbol{y''(1)}$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\displaystyle\int(\frac{1}{\ln x}+2\ln\ln x)x\,\mathrm{d}\,x$.

(2)$\displaystyle\int xe^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$.

(3)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 x\,\mathrm{d}\,x$.

(4)$\displaystyle\int_0^4\frac{1}{2\sqrt{x}-2x+x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$.

3．(本题10分) 设$\boldsymbol{L}$是抛物线$\boldsymbol{y = x^2}$于$\boldsymbol{(1,1)}$点的切线，平面有界区域$\boldsymbol{D}$由抛物线$\boldsymbol{y = x^2}$与直线$\boldsymbol{L}$及$\boldsymbol{x}$轴围成，求$\boldsymbol{D}$绕$\boldsymbol{x}$轴旋转一周所得旋转体的体积.

4．(本题10分) 证明：当$\boldsymbol{x > 0}$时成立不等式：$\boldsymbol{(1 + x^2)\arctan x > x}$

5．(本题10分) 分别讨论函数$\boldsymbol{x \ln x}$在$\mathbf{(0,1]}$及$\mathbf{[1,+\infty)}$上的一致连续性.

6．(本题10分) 讨论函数$\boldsymbol{y = \mathrm{arctan}(1 + x^2)}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7．(本题10分) 设$\boldsymbol{f(x)}$是$[\boldsymbol{-1,1}]$上二阶可导的奇函数, 且 $\boldsymbol{f(1)=2}$, 证明:

(1)$\exists\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{(0,1)}$, 使$\boldsymbol{f'(\xi)=2}$;

(2)$\exists\boldsymbol{\eta}\in\boldsymbol{(0,1)}$, 使$\boldsymbol{f''(\eta)=0}$;

(3)$\exists\boldsymbol{\tau}\in\boldsymbol{(0,1)}$, 使$\boldsymbol{f''(\tau)+f'(\tau)=2}$.

8．(本题10分) (1)求$\boldsymbol{f(x)=\ln x+\frac{1}{x}}$的最值; (2)设数列$\boldsymbol{\{a_n\}}$满足$\boldsymbol{\ln(a_n)+\frac{1}{a_{n+1}}<1}$, $\boldsymbol{n=1,2,\ldots}$, 证明数列$\boldsymbol{\{a_n\}}$收敛并求极限.

A卷答案

1. (1)e; (2)1; (3)$(2019!)^2$; 解答过程：每一项$\sin kx$假如不求导，其在$x=0$的函数值都是零，所以如果要非零的值，每一项都至少需要求一次导数，一共有2019项，导数总次数是2019次，所以每一项分配得一次导数：

$$
\begin{aligned}
&\left(\sin x\sin 2x\sin 3x\cdot\cdots\cdot\sin 2019x\right)^{(2019)}\Big|_{x=0}\\
=&C_{2019}^{1}(\sin x)'\left(\sin 2x\sin 3x\cdot\cdots\cdot\sin 2019x\right)^{(2018)}\Big|_{x=0}\\
=&C_{2019}^{1}(\sin x)'C_{2018}^{1}(\sin 2x)'\left(\sin 3x\cdot\cdots\cdot\sin 2019x\right)^{(2017)}\Big|_{x=0}\\
=&C_{2019}^{1}(\sin x)'C_{2018}^{1}(\sin 2x)'C_{2017}^{1}(\sin 3x)'\left(\sin 4x\cdot\cdots\cdot\sin 2019x\right)^{(2016)}\Big|_{x=0}\\
&\cdots\\
=&2019!(\sin x)'(\sin 2x)'(\sin 3x)'\cdot\cdots\cdot(\sin 2019x)'\Big|_{x=0}\\
=&(2019!)^2
\end{aligned}
$$

(4)$y(1)=1$, $y'(1)=\dfrac{3}{4}$, $y''(1)=-\dfrac{107}{64}$.

2. (1)$-e^{\sin x}\cos x+C$; (2)$e^{\arctan x}+C$; (3)$(x\tan x-\ln|\sec x|-\dfrac{1}{2}x^2)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi^2}{32}$; (4)$\dfrac{\pi}{6}$.

3. 切点为$(1,e)$, 切线方程为$y=ex$ $V=\pi\displaystyle\int_0^1(e^{2x}-e^2x^2)\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{\pi(e^2-3)}{6}$.

4. 记$f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$, 则:

$$f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0,\quad f''(x)=-\sin x<0$$

证法一：所以$f(x)$是上凸函数，所以$f(x)>0$.

证法二：记$f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}=0$的解为$x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 因为$f''(x)>0$所以$f'(x)$单调下降，因而：

当$x\in(0,x_0)$时$f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f(x)>f(0)=0$;

当$x\in(x_0,\dfrac{\pi}{2})$时$f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f(x)>f(\dfrac{\pi}{2})=0$.

5.（1）记$f(x)=\ln(e^x+\ln^2 x)$,

(1)方法一：$f(0+0)=+\infty$所以在$(0,1]$上非一致连续; 方法二：取$x_n=e^{-n}\to 0$, $x'_n=\dfrac{1}{n}\to 0$, 但是$f(x_n)-f(x'_n)=\ln(e^{e^{-n}}+n^2)-\ln(e^{\frac{1}{n}}+\ln^2 n)\to+\infty$所以在$(0,1]$上非一致连续;

(2)令$g(x)=f(x)-x=\ln(e^x+\ln^2 x)-\ln(e^x)=\ln(1+\dfrac{\ln^2 x}{e^x})$, $g(+\infty)=0$，所以函数$g(x)$在$[1,+\infty)$上一致连续, 所以函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上一致连续.

6.略

7.(1)$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$;

(2)$f'(1)=f'(\xi)=1\Rightarrow f''(\eta)=0$;

(3)做$g(x)=e^x(f'(x)-1)$, $g(0)=g(\xi)=0$, 所以，$g'(\tau)=0$, 即$f''(\tau)+f'(\tau)=1$.

8.(1)$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$, 且：

$0<x<e$时$f'(x)>0$,

$x>e$时$f'(x)<0$,

所以$f(e)=\dfrac{1}{e}$是$f(x)$的最大值;

$f(0+0)=-\infty\Rightarrow f(x)$没有最小值;

(2)由题设条件得：$\dfrac{\ln(a_{n+1})}{a_n}>\dfrac{1}{e}=f_{\max}$

所以$\dfrac{\ln(a_{n+1})}{a_n}>\dfrac{\ln(a_n)}{a_n}\Rightarrow a_{n+1}>a_n$;

若a_n有上界，则a_n收敛，记其极限为A, 则$\dfrac{\ln(A)}{A}\geq\dfrac{1}{e}=f_{\max}$, 所以$A=e$, 所以$\arctan a_n\to\arctan e$;

若a_n没有上界，则$a_n\to+\infty$，所以$\arctan a_n\to\dfrac{\pi}{2}$.

B卷答案

1. (1)e^{-1}; (2)$\frac{1}{3}$; (3)0; 解答过程：每一项$\cos kx$只要求了奇数次导数必等于$\pm k^l \sin kx$，其在$x=0$处的值必为零，求导总次数是2019次，是个奇数，和为奇数，必至少有一项为奇数. (4)$y(1)=1$, $y'(1)=\frac{3}{5}$, $y''(1)=-\frac{37}{20}$.

2. (1)$x^2\ln\ln x+C$; (2)$(2x^{\frac{3}{2}}-6x+12x^{\frac{1}{2}}-12)e^{\sqrt{x}}+C$; (3)$(\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\ln 2}{4}$; (4)$\pi$.

3. 切线方程为$y=2x-1$ $V=\pi\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}\,x-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)^2\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{30}$.

4. 证法一：

$$\arctan x=\arctan x-0=\frac{x}{1+\xi^2}>\frac{x}{1+x^2}$$

证法二：

记$f(x)=1+x^2\arctan x-x$, 则：

$$f(0)=0,\quad f'(x)=2x\arctan x>0$$

所以$f(x)>f(0)=0$.

5.（1）记$f(x)=x\ln x$,
(1)$f(0+0)=0$所以在$(0,1]$上一致连续;
(2)令$x_n=n$, $x_n'=n+\frac{1}{\ln n}$,

$$f(x_n')-f(x_n)=(n+\frac{1}{\ln n})\ln(n+\frac{1}{\ln n})-n\ln n=n\ln(1+\frac{1}{n\ln n})+\frac{1}{\ln n}\ln(n+\frac{1}{\ln n})\to 1\neq 0$$

所以函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上非一致连续.

6.略

7.(1)$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2$;
(2)$f'(-\xi)=f'(\xi)=2\Rightarrow f''(\eta)=0$;
(3)做$g(x)=e^x(f'(x)-2)$, $g(-\xi)=g(\xi)=0$, 所以，$g'(\tau)=0$, 即$f''(\tau)+f'(\tau)=2$.

8.(1)$\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x=1}$, 且:

$\boldsymbol{0<x<1}$时$\boldsymbol{f'(x)<0}$,

$\boldsymbol{x>1}$时$\boldsymbol{f'(x)>0}$,

所以$\boldsymbol{f(1)=1}$是$\boldsymbol{f(x)}$的最小值;

$\boldsymbol{f(0+0)=+\infty\Rightarrow f(x)}$没有最大值;

(2)由题设条件得:$\boldsymbol{\ln(a_n)+\frac{1}{a_{n+1}}<1=f_{\min}}$

所以$\boldsymbol{\ln(a_n)+\frac{1}{a_{n+1}}<\ln(a_n)+\frac{1}{a_n}\Rightarrow a_{n+1}>a_n}$;

$\boldsymbol{\ln(a_n)\le\ln(a_n)+\frac{1}{a_{n+1}}<1\Rightarrow a_n<e}$;

所以$\boldsymbol{a_n}$单调上升有上界,$\boldsymbol{a_n}$收敛,记其极限为$\boldsymbol{A}$, 则$\boldsymbol{\ln(A)+\frac{1}{A}\le 1=f_{\min}}$, 所以$\boldsymbol{A=1}$, 所以$\boldsymbol{a_n\to 1}$.