复旦大学管理学院

2018～2019学年第一学期期中考试试卷(共6页)

课程名称：数学分析BI　　课程代码：MATH 20016.06

开课院系：管理学院　　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得　分								

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共5小题，每小题5分，共25分)

(1)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}-\sqrt{2+4+6+\cdots+2n}\right)$.

(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})^{n^2}$.

(3)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1-x}{1-\cos x}$.

(4)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x+1})$.

(5)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(1-\sqrt{1-x^2})}{\tan x-\sin x}$.

2．(本题共5小题，每小题5分，共25分)

(1)设$f(x)=\ln\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, 求$f'(x)$.

(2)设$f(x)=\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)$, 求$f'(x)$.

(3)设隐函数$y=y(x)$满足方程$y=(1+\sin x)^y$, 求$y''(0)$.

(4)设$\begin{cases} x=\cos t+\cos^2 t \\ y=\sin t+\sin^2 t \end{cases}$, 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

(5)设$f(x)$在$x=0$点连续且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)}{\ln(1+x)}=2$, 求$f'(0)$.

3．(本题10分) 设$\boldsymbol{f(x) = x^n|x|}$, 问当正整数$\boldsymbol{n}$满足何种条件时： $\boldsymbol{f^{(2018)}(0)}$存在？

4．(本题10分) 设$\boldsymbol{x_n}$满足$\boldsymbol{x_{n+1} + (x_{n+1} - 4)x_n = 3}$, $\boldsymbol{n \geq 1}$, $\boldsymbol{x_1 = 4}$. 证明$\boldsymbol{\{x_n\}}$收敛，并求出其极限.

5．(本题10分) 设$\boldsymbol{f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}}$在$\mathbb{R}$上连续, 求常数$\boldsymbol{a, b}$的值.

6．(本题10分) 问函数$\sqrt{x}$及函数$\sqrt{x}\sin x$, 在$(0,+\infty)$上是否分别一致连续？说明理由.

7.（本题10分） 证明方程$\tan x = \sqrt{x}$在$(n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2})$上存在唯一的根$a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
并计算$\lim\limits_{n\to\infty} \cos a_n$.

参考答案：
1/(1)$-\frac{1}{2}$;(2)$e^{-\frac{1}{2}}$;(3)-2;(4)1;(5)$\frac{1}{3}$.

2/(1)$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; (2)$\frac{2x+3}{x^2+2x+2}$; (3)$y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$; (4)-1; (5)$f(0)=1$, $f'(0)=2$.

3.$f(x)=\begin{cases} x^{n+1}, & x\geq 0 \\ -x^{n+1}, & x\leq 0 \end{cases}$, 所以：当$k<n+1$时，$f^{(k)}(0)=0$, $\begin{cases} f_+^{(n+1)}(0)=(n+1)! \\ f_-^{(n+1)}(0)=-(n+1)! \end{cases}$,
所以$f^{(n+1)}(0)$不存在.

所以$2018<n+1$, 即$n\geq 2018$.

4.证：易证： x_n单调下降且 $x_n>\frac{3+\sqrt{21}}{2}$。所以$x_n$收敛, 可求得极限为$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

5.解：

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & |x|<1 \\ \frac{1}{x}, & |x|>1 \\ \frac{1+a+b}{2}, & x=1 \\ \frac{a-1-b}{2}, & x=-1 \end{cases}$$

由$x=1$处的连续性可得：$a+b=1$;
由$x=-1$处的连续性可得：$a-b=-1$;
解得：$a=0, b=-1$.

6.解：(1)当$x,y\geq 1$时：$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq|x-y|$, 所以函数在$[1,+\infty)$上一致连续，又在$[0,1]$上由Cantor定理知函数一致连续，总之，函数在$(0,+\infty)$上一致连续.

(2) 取$x_n=2n\pi$, $\tilde{x}_n=2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}}$, 则

$$f(\tilde{x}_n)-f(x_n)=\sqrt{2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\to\sqrt{2}\neq 0$$

所以函数在$(0,+\infty)$上非一致连续.

7.证明：记$f(x)=\tan x-\sqrt{x}$, 当$n\geq 1$时：

$$f(n\pi)=-\sqrt{n\pi}<0,\quad f(n\pi+\frac{\pi}{2}-0)=+\infty$$
$$f'(x)=\sec^2 x-\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$$

所以在$(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$内存在唯一的根$(n\geq 1)$.

当$n=0$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时：

$$f(0)=0,\quad f(n\pi+\frac{\pi}{2}-0)=+\infty$$
$$f'(0+0)=-\infty$$
$$f''(x)=2\sec^2 x\tan x+\frac{1}{4\sqrt{x^3}}>0$$

所以在$(0,\frac{\pi}{2})$内存在唯一的根.

$\cos a_n=\dfrac{\sin a_n}{\sqrt{a_n}}\to 0$.