复旦大学管理学院

2017～2018学年第一学期期中考试试卷(共6页)

课程名称：数学分析BI　课程代码：MATH 20016.06

开课院系：管理学院　考试形式：闭卷

姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得　分								

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共5小题，每小题5分，共25分)

(1)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n+2}\right)$.

(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(3)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{1-\cos 3x}$.

(4)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$.

(5)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}$.

2．(本题共5小题，每小题5分，共25分)

(1)设$f(x)=\arctan\dfrac{\tan x}{2}$, 求$f'(x)$.

(2)设$f(x)=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$, 求$f'(x)$.

(3)设隐函数$y=y(x)$满足方程$y=1+xe^y$, 求$y''(0)$.

(4)设$\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$, 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=2}$.

(5)设$f(x)$在$x=0$点连续且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 求$f'(0)$.

3．(本题10分) 设$f(x)=\begin{cases} x^a\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 问当常数$a$满足何种条件时：(1)$f(x)$在$x=0$点可导；(2)$f'(x)$在$x=0$点连续.

4．(本题10分) 设x_n满足$x_{n+1}=x_n-x_n^2$, $n\geq 1$, $x_1\in[0,1]$. 证明$\{x_n\}$收敛，并求出其极限.

5．(本题10分) 设$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{\pi}{x}, & x<0 \\ A, & x=0 \\ ax^2+b, & x>0 \end{cases}$，求常数$A,a,b$使 $f(x)$在$x=0$处可导，并求出$f'(0)$，又问$f''(0)$是否存在？

6．（本题10分） 问函数$\frac{x^3}{1+x^2}$及函数$\frac{x^4}{1+x^2}$，在$(-\infty,+\infty)$上是否分别一致连续？说明理由.

7. (本题10分) 设函数$\boldsymbol{f(x)}$在$[\mathbf{0},\mathbf{1}]$上连续、非负且$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbf{Z}^+$成立：

$$\frac{1}{n+1}\left(f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right) = \sqrt[n+1]{f(0)f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$$

证明$\boldsymbol{f(x)}$在$[\mathbf{0},\mathbf{1}]$上为常数.

参考答案：

1/(1)$\mathbf{1}$;(2)$\boldsymbol{e}$;(3)$\boldsymbol{\infty}$;(4)$\mathbf{-1}$;(5)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2/(1)$\dfrac{2}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$; (2)$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; (3)$y(0)=1$, $y'(0)=e$, $y''(0)=2e^2$; (4)$-\dfrac{2}{3}$; (5)$f(0)=0$, $f'(0)=0$.

3.(1)$a>1$; (2)$a>2$.

4.证：$n\geq 2$时$x_n\in[0,\dfrac{1}{2}]$, 所以$n\geq 2$时易证： x_n单调下降。所以x_n收敛且极限为零.

5.解：$f(0-0)=0=A=f(0+0)=b$, $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=0$, 所以$f'(0)=0$; $f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0}(3x\sin\dfrac{\pi}{x}-\cos\dfrac{\pi}{x})$不存在，所以$f''(0)$不存在.

6.解：(1)$\dfrac{x^3}{1+x^2}=x-\dfrac{x}{1+x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$, 所以$\dfrac{x}{1+x^2}$在$\mathbf{R}$上一致连续, 所以$\dfrac{x^3}{1+x^2}$在$\mathbf{R}$上一致连续.

(2)解法一：$\dfrac{x^4}{1+x^2}=x^2-\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$, 所以$\dfrac{x^2}{1+x^2}$在$\mathbf{R}$上一致连续, 所以$\dfrac{x^4}{1+x^2}$在$\mathbf{R}$上非一致连续.

解法二：取$x'_n=n$, $x''_n=n+\dfrac{1}{n}$, 易证：$x'_n-x''_n\to 0$, 但$f(x'_n)-f(x''_n)\not\to 0$, 所以$\dfrac{x^4}{1+x^2}$在$\mathbf{R}$上非一致连续.

7.证明：显然

$$f(0)=f(\frac{1}{n})=f(\frac{2}{n})=\cdots=f(\frac{n}{n})$$

所以当$r\in[0,1]$且$r\in Q$(有理数)时， $f(r)=f(0)$.

$\forall x_0\in[0,1]$且x_0为无理数时，显然可取到$r_n\in[0,1]$且$r_n\in Q$使得$r_n\to x_0$, 所以$f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=f(0)$.