复旦大学管理学院

2017～2018学年第一学期期末考试试卷

A卷(共7页)

课程名称：______数学分析BI______ 课程代码：______MATH 20016.10______

开课院系：______管理学院______ 考试形式：闭卷

姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

声明：我已知悉学校对于考试纪律的严肃规定，将秉持诚实守信宗旨，严守考试纪律，不作弊，不剽窃；若有违反学校考试纪律的行为，自愿接受学校严肃处理。

学生(签名)：__________

______年____月____日

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4, & |x|<1\\ \frac{2}{3}|x|-\frac{1}{4}, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

(1)计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)\ln n$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

(3)$f(x)=\sin x\sin 2x$, 求高阶导数$f^{(2017)}(0)$.

(4)设$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\displaystyle\int (1+\frac{1}{x})\ln x\,\mathrm{d}x$.

(2)$\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(3)$\displaystyle\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$.

(4)$\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3．(本题10分) 设平面有界区域$\boldsymbol{D}$由抛物线$\boldsymbol{y = ax^2}$, 两直线$\boldsymbol{y = 0}$和$\boldsymbol{x = 1}$围成，已知$\boldsymbol{D}$分别绕$\boldsymbol{x}$轴和$\boldsymbol{y}$轴旋转一周所得两旋转体的体积相等，求常数$\boldsymbol{a(> 0)}$.

4．(本题10分) 在曲线$\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2}}$上求一点$\boldsymbol{P}$，使此曲线过$\boldsymbol{P}$点的切线被两坐标轴所截得的线段长度达到最小值.

5．(本题10分) 分别讨论函数$\sin(x+\dfrac{1}{x})$在$(0,1]$及$[1,+\infty)$上的一致连续性.

6．(本题10分) 讨论函数$y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7．(本题10分) 设$\boldsymbol{f(x)}$在$[\boldsymbol{0,1}]$上可导, 且 $\boldsymbol{f(0)=0}$, $\boldsymbol{f(1)=1}$, 证明：

(1)$\exists\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{(0,1)}$, 使$\boldsymbol{f(\xi)=1-\xi}$;

(2)$\exists\boldsymbol{\eta,\tau}\in\boldsymbol{(0,1)}$, $\boldsymbol{\eta}\neq\boldsymbol{\tau}$, 使$\boldsymbol{f'(\eta)f'(\tau)=1}$.

8．(本题10分) 设$\boldsymbol{n \geq 0}$为非负整数，证明方程$\sin \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$在区间$(\boldsymbol{2n\pi, 2n\pi + \pi})$上恰好有两个不相等的根，记为$\boldsymbol{2n\pi < a_n < b_n < 2n\pi + \pi}$, 并求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} (-\cos \boldsymbol{a_n} \cos \boldsymbol{b_n})^{\boldsymbol{a_n b_n}}$.

复旦大学管理学院

2017～2018学年第一学期期末考试试卷

B卷(共7页)

课程名称：数学分析BI　　课程代码：MATH120016.10

开课院系：管理学院　　考试形式：闭卷

姓名：________________ 学号：________________ 专业：________________

声明：我已知悉学校对于考试纪律的严肃规定，将秉持诚实守信宗旨，严守考试纪律，不作弊，不剽窃；若有违反学校考试纪律的行为，自愿接受学校严肃处理。

学生(签名)：________________

________年_____月_____日

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+n-1}-n-1}{\sqrt{n^2+\sin n}}$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}$.

(3)$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2018)$, 求高阶导数$f^{(2018)}(0)$.

(4)设$\boldsymbol{y=y(x)}$满足方程$\boldsymbol{y=1+xe^y}$, 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}\right|_{x=0}$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x$.

(2)$\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$.

(3)$\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}\,x$.

(4)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)^2\,\mathrm{d}\,x$.

3．(本题10分) 设平面有界区域$\boldsymbol{D}$由抛物线$\boldsymbol{y = x^2}$, 两直线$\boldsymbol{x = 0}$和$\boldsymbol{y = 1}$围成，求$\boldsymbol{D}$绕$\boldsymbol{x}$轴旋转一周所得旋转体的体积.

4．(本题10分) 在曲线$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x}}$上求一点$\boldsymbol{P}$，使此曲线过$\boldsymbol{P}$点的切线到原点的距离达到最大值.

5．(本题10分) 分别讨论函数$\ln(x+\dfrac{1}{x})$在$(0,1]$及$[1,+\infty)$上的一致连续性.

6．(本题10分) 讨论函数$\boldsymbol{y=\dfrac{(2x-1)^2}{x-1}}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7. (本题10分) 设偶函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 且 $f(0) = 0$, 证明：$\forall a > 0$, $\exists \xi \in (0, a)$, 使$f''(\xi) = \dfrac{2f(a)}{a^2}$.

8．(本题10分) 设$\boldsymbol{n}$为正整数，证明方程$\tan x = x$在区间$(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$上有唯一的根$a_n$, 并求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 a_n)^{a_n^2}$.

A卷答案

1. (1)$\mathbf{0}$; (2)$\frac{4}{3}$; (3)$\mathbf{0}$; (4)$\sqrt{2}$.

2. (1)$x\ln x-x+\ln|\ln x|+C$; (2)$2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$; (3)$x\tan x-\ln|secx|+C$; (4)$4-2\ln 3$.

3. $V_1=\frac{1}{5}\pi a^2$, $V_2=\frac{1}{2}\pi a$, $a=\frac{5}{2}$.

4. 设$P(x_0,y_0)$,切线方程为：$y-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{2}{x_0^3}(x-x_0)$, 在$x,y$轴上的截距分别为：$\frac{3}{2}x_0,\frac{3}{x_0^2}$, 线段的长度平方函数：$f(x_0)=\frac{9}{4}x_0^2+\frac{9}{x_0^4}$. $f'(x)=\frac{9}{2}x-\frac{36}{x^5}=0$, 得$x=\pm\sqrt{2}$, $f''(x)=\frac{9}{2}+\frac{180}{x^6}>0$, 所以$f_{\min}=f(\pm\sqrt{2})$, 所求点为$P(\pm\sqrt{2},\frac{1}{2})$.

5.（1）$\lim\limits_{x\to 0+0}\sin\big(x+\frac{1}{x}\big)$不存在，所以函数在$(0,1]$上非一致连续.

(2)$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, 所以$x+\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续，又$\sin x$在$R$上一致连续，所以$\sin\big(x+\frac{1}{x}\big)$在$[1,+\infty)$上一致连续.

6.略

7.(1)做$g(x)=f(x)-(1-x)$, $g(0)=-1$, $g(1)=1$, 所以，$\exists\xi\in(0,1)$使$g(\xi)=0$, 即$f(\xi)=1-\xi$.

在$(0,\xi)$和$(\xi,1)$上分别用Lagrange中值定理，得：

$\exists\eta\in(0,\xi)$、$\tau\in(\xi,1)$使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi},\quad f'(\tau)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

所以$f'(\eta)f'(\tau)=1$.

8. 做$g(x)=\sin x-\frac{1}{x}$, 则$g(2n\pi)<0$，$g(2n\pi+\pi)<0$, $g(2n\pi+\frac{\pi}{2})>0$，所以存在$a_n\in(2n\pi,2n\pi+\frac{\pi}{2})$和$b_n\in(2n\pi+\frac{\pi}{2},2n\pi+\pi)$使$g(a_n)=g(b_n)=0$,

又$g''(x)=-\sin x-\dfrac{2}{x^3}<0$, 所以在$(2n\pi,2n\pi+\pi)$上仅有两个根.

显然$a_n,b_n\sim 2n\pi$.

$a_n-2n\pi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $\sin(a_n-2n\pi)=\sin a_n=\dfrac{1}{a_n}\to 0$, 所以$a_n-2n\pi\sim\dfrac{1}{2n\pi}$, 同理$0<2n\pi+\pi-b_n\sim\dfrac{1}{2n\pi}$. 所以

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}a_nb_n\ln(-\cos a_n\cos b_n)=\lim_{n\to\infty}a_nb_n\ln(\cos(a_n-2n\pi)\cos(2n\pi+\pi-b_n))\\
=&\lim_{n\to\infty}a_nb_n\ln(\cos(a_n-2n\pi)+\lim_{n\to\infty}a_nb_n\ln(\cos(2n\pi+\pi-b_n))\\
=&\lim_{n\to\infty}a_nb_n(\cos(a_n-2n\pi)-1)+\lim_{n\to\infty}a_nb_n(\cos(2n\pi+\pi-b_n)-1)\\
=&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}a_nb_n(a_n-2n\pi)^2-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}a_nb_n(2n\pi+\pi-b_n)^2\\
=&-1,\quad \text{所求极限为}e^{-1}
\end{aligned}
$$

B卷答案

1. (1)$\mathbf{1}$; (2)$\mathbf{2}$; (3)$-(1+2+\cdots+2018)2018!$; (4)$2e^2$.

2. (1)$\ln|\sin x+\cos x|+C$; (2)$2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$; (3)$\dfrac{x^2+1}{2}\arctan x-\dfrac{1}{2}x+C$; (4)$\dfrac{\pi}{2}+1$.

3. $\dfrac{4}{5}\pi$.

4. 设$P(x_0,y_0)$,切线方程为：$y-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)$, 到原点$(0,0)$的距离平方函数为：$f(x_0)=\dfrac{4x_0^2}{1+x_0^4}$. 设$g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, 求$g(x)$在$x\in(0,+\infty)$的最大值：

$g'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$, 得$x=1$, $g''(1)=-\dfrac{1}{4}<0$, $x=1$ 是$g(x)$的唯一极值点且是极大值点，所以$g_{\max}=g(1)$, 所求点为$P(\pm1,\pm1)$.

5.（1）$\lim\limits_{x\to0+0}\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$，所以函数在$(0,1]$上非一致连续.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, 所以$x+\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续，又$\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续，所以$\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$在$[1,+\infty)$上一致连续.

6.略

7.$f'(x)$是奇函数，所以$f'(0)=0$, 所以，$\exists\xi\in(0,a)$使

$$f(a)=f(0)+f'(0)a+\frac{f''(\xi)}{2}a^2=\frac{f''(\xi)}{2}a^2$$

所以$f''(\xi)=\dfrac{2f(a)}{a^2}$.

8. 做$g(x)=\tan x-x$, 则$g(n\pi+0)=-\infty$，$g(n\pi+\dfrac{\pi}{2}-0)=+\infty$, $g'(x)=\sec^2x-1>0$，所以存在唯一的$a_n\in(n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2})$使$g(a_n)=0$.

显然$a_n\sim n\pi$.

$a_n - n\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan(\frac{\pi}{2} + n\pi - a_n) = \frac{1}{\tan a_n} = \frac{1}{a_n} \to 0$, 所以$\frac{\pi}{2} + n\pi - a_n \sim \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{n\pi}$,所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} a_n^2 \ln(\sin^2 a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 \ln(\cos^2(\frac{\pi}{2} + n\pi - a_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n^2 (\cos^2(\frac{\pi}{2} + n\pi - a_n) - 1) \\
&= -\lim_{n\to\infty} a_n^2 (\frac{\pi}{2} + n\pi - a_n)^2 \\
&= -1, \quad \text{所求极限为} e^{-1}
\end{aligned}$$