复旦大学管理学院

2016～2017学年第一学期期末考试试卷

A卷(共6页)

课程名称：数学分析BI　　课程代码：MATH 20016.10

开课院系：管理学院　　考试形式：闭卷

姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

注意: 答案请做在考试卷上, 做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right)$.

(3)求n阶导数$(\sin^2 x)^{(n)}$.

(4)设$f(x)$在$x=0$处二阶可导，且$f(0)=0$, $f'(0)=f''(0)=1$. $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ $(x\neq 0)$, $g(0)=1$, 求$g'(0)$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}\, x$.

(2)$\int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\, x$.

(3)$\int_0^{2017} [x](x-[x]) \,\mathrm{d}\, x$, 其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

(4)$\int_0^1 \frac{x}{x^2+(1-x)^2} \,\mathrm{d}\, x$.

3．(本题10分) 求平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2x\}$绕直线$y=1$旋转一周所得旋转体的体积.

4．(本题10分) 求$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}}$带Peano余项的$\boldsymbol{n}$阶Maclaurin展开.

5．(本题10分) 分别讨论函数$\mathbf{sin^2(\sqrt{\boldsymbol{x}})}$, $\sqrt{\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}^2)}$, 在$(\mathbf{0}, +\infty)$上的一致连续性.

6．(本题10分) 讨论函数$\boldsymbol{y = \frac{(x+1)^2}{x-1}}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7．(本题10分) 设$\boldsymbol{n \geq 3}$为正整数，证明方程$\boldsymbol{xe^{-x} = \frac{1}{n}}$分别在区间$\boldsymbol{(0,1)}$和$\boldsymbol{(1,+\infty)}$中有唯一解，记为$\boldsymbol{a_n \in (0,1)}$, $\boldsymbol{b_n \in (1,+\infty)}$, 并求极限: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} na_n}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{\ln n}}$.

8．（本题10分） 设$f(x)$,$g(x)$在闭区间$[0,1]$上二阶可导, 且 $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$,
又$f(x)$和$g(x)$在开区间$(0,1)$上能取到相等的最大值.

(1)证明方程$f'(x)=g'(x)$在开区间$(0,1)$上有解;

(2)证明方程$f''(x)=g''(x)$在开区间$(0,1)$上也有解.

复旦大学管理学院

2016～2017学年第一学期期末考试试卷

B卷(共6页)

课程名称：数学分析BI 课程代码：MATH120016.10

开课院系：管理学院 考试形式：闭卷

姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

1．(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)计算极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.

(2)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

(3)求高阶导数$(x^2\sin x)^{(100)}$.

(4)设$g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\ (x\neq 0)$, $g(0)=0$, 求$g'(0)$.

2．(本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x$.

(2) $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

(3) $\int_0^{2016\pi} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}\,x$.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}\,x$.

3．(本题10分) 求平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$绕直线$y=1$旋转一周所得旋转体的体积.

4．(本题10分) 求$\boldsymbol{f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}}$带Peano余项的$\boldsymbol{n}$阶Maclaurin展开.

5．(本题10分) 分别讨论两函数$\boldsymbol{x\cos\frac{1}{x}}$和$\boldsymbol{x^2\cos\frac{1}{x}}$, 在$\boldsymbol{(0,+\infty)}$上的一致连续性.

6．(本题10分) 讨论函数$\boldsymbol{y = x^2 e^{-x}}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7.（本题10分） 设$\boldsymbol{n}$为正整数，证明方程$\ln(1+x)=\dfrac{x}{n}$在区间$(0,+\infty)$中有唯一解，记为$a_n\in(0,+\infty)$. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$.

8．(本题10分) 设$f(x)$,$g(x)$在闭区间$[0,1]$上可导, 且 $f(0) = g(0) = f(1) = 0$, $g(1) = 1$, $n > 0$为正整数. 证明存在$\xi \in (0,1)$使得$g'(\xi) = n(f'(\xi) + \xi^{n-1})$.

A卷答案

1. (1)-1; (2)$-\frac{1}{6}$; (3)$2^{n-1}\sin(2x+(n-1)\frac{\pi}{2})$; (4)$\frac{1}{2}$.

2. (1)$\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$; (2)$2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$; (3)$\frac{2016\times 2015}{4}=1,015,560$; (4)$\frac{1}{2}\arctan(2x-1)|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

3. $2\pi^2$.

4. $f(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{i=0}^n(-1)^i x^i-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^n\frac{x^i}{2^i}+o(x^n)=\sum_{i=0}^n((-1)^i-\frac{1}{2^{i+1}})x^i+o(x^n)$.

5.（1）$f(x)=\sin^2(\sqrt{x})$一致连续，证明：

$f(0+0)=0$, $f'(x)=\sin(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以$x\geq 1$时， $|f'(x)|\leq 1$, 所以$f(x)$在$(0,1]$及$[1,+\infty)$上分别一致连续，所以在$(0,+\infty)$上一致连续.

(2)$g(x)=\sqrt{\sin(x^2)}$非一致连续，说明：

取$x_n=\sqrt{2n\pi}$, $y_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, 则 $y_n-x_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2n\pi}}\to 0$, 但是$g(y_n)-g(x_n)=1$.

6.略

7.$f(x)=xe^{-x}$, $f(0)=0$, $f(+\infty)=0$, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$, $x\in(0,1)$时$f'(x)>0$, $x\in(1+\infty)$时$f'(x)<0$, $f_{\max}=f(1)=\frac{1}{e}>\frac{1}{3}$. 所以，$n\geq 3$时，$f(x)=\frac{1}{n}$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$内分别有唯一解。

因为$f(a_n)=f(b_n)=\frac{1}{n}\to 0$, 所以$a_n\to 0$, $b_n\to +\infty$.

$na_n=e^{-a_n}\to e^0=1$.

$\ln n = b_n - \ln b_n$, $\dfrac{b_n}{\ln n} = \dfrac{b_n}{b_n - \ln b_n} \to 1$.

8. (1)(2)合起来证明：根据题意，存在$\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$, 使$f(\xi_1) = g(\xi_2) = \max_{x\in(0,1)} f(x) = \max_{x\in(0,1)} g(x)$. 不妨设$\xi_1 \le \xi_2$, 则$f(\xi_1) \ge g(\xi_1)$, $f(\xi_2) \le g(\xi_2)$, 所以存在$c \in [\xi_1, \xi_2] \subset (0,1)$使得$f(c) = g(c)$.

根据Rolle定理，存在$a \in (0,1)$, $b \in (c,1)$使得$f'(a) = g'(a)$, $f'(b) = g'(b)$.

还是根据Rolle定理，存在$d \in (a,b) \subset (0,1)$使得$f''(d) = g''(d)$.

B卷答案

1. (1)-3; (2)$\dfrac{1}{2}$; (3)$-9900\sin x$; (4)0.

2. (1)$\ln(e^x+1)+C$; (2)$-\dfrac{1}{x}\arctan x + \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; (3)$2016 \times 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \,\mathrm{d}\, x = 2016 \times 4(\sqrt{2}-1)$; (4)$\dfrac{\pi}{4}$.

3. $2\pi^2$.

4. $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{i=1}^n \dfrac{(-1)^{i-1}x^i}{i} - \left(\sum_{i=1}^n \dfrac{-x^i}{i}\right) + o(x^n) = 2\sum_{i=1}^k \dfrac{x^i}{2i-1} + o(x^n)$, 其中$2k-1$为不超过$n$的最大奇数.

5.（1）$f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$一致连续，证明：

$f(0+0) = 0$, $f'(x) = \cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$, 所以$x \ge 1$时，$|f'(x)| \le 2$, 所以$f(x)$在$(0,1]$及$[1,+\infty)$上分别一致连续，所以在$(0,+\infty)$上一致连续.

(2)$g(x) = x^2\cos\dfrac{1}{x}$非一致连续，说明：

取$x_n = n$, $y_n = n + \dfrac{1}{n}$, 则 $g(y_n) - g(x_n) = \left((n+\dfrac{1}{n})^2 - n^2\right)\cos\dfrac{1}{n} + (n+\dfrac{1}{n})^2(\cos\dfrac{n}{n^2+1} - \cos\dfrac{1}{n}). = (2+\dfrac{1}{n^2})\cos\dfrac{1}{n} + (n+\dfrac{1}{n})^2\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{n^2}{(n^2+1)^2} + o(\dfrac{1}{n^3})) \to 2$.

6.略

7.$f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $f(0+0) = +\infty$, $f(+\infty) = 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$, 令$g(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$, $g'(x) = -\dfrac{x}{(x+1)^2} < 0$, $x \in (0, +\infty)$, $g(0) = 0$, 所以$x > 0$时$g(x) < 0$，$f'(x) < 0$.

所以，$f(x) = \dfrac{1}{n}$在$(0, +\infty)$内有唯一解。

因为$f(a_n) = \dfrac{1}{n} \to 0$, 所以$a_n \to +\infty$.

$\dfrac{a_n}{n} = \ln(1+a_n) \to +\infty$.

$\dfrac{a_n}{n^2} = \dfrac{\ln^2(1+a_n)}{a_n} \to 0$.

8. 令$F(x) = g(x) - nf(x) - x^n$, 则$F(0) = F(1) = 0$, 根据Rolle定理，存在$\xi \in (0.1)$使得：$F'(\xi) = 0$,即得本题结论.