# 复旦大学管理学院

## 2016～2017学年第一学期期中考试试卷(共6页)

课程名称：数学分析BI　课程代码：MATH 20016.06

开课院系：管理学院　考试形式：闭卷

姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

| 题　号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得　分 | | | | | | | | |

注意：答案请做在考试卷上，做在草稿纸上一律无效。

**1．(本题共5小题，每小题5分，共25分)**

(1)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n\sin n+1}{n^2+2n+2}$.

(2)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{\ln\cos x}$.

(3)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1+x-x^2}}{x\arcsin x}$.

(4)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x}\right)$.

(5)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{1+2^{n+1}}+\frac{2^2}{2+2^{n+2}}+\cdots+\frac{2^n}{n+2^{n+n}}\right)$.

**2．(本题共5小题，每小题5分，共25分)**

(1)设$f(x)=e^{\arcsin\sqrt{x}}$, 求$f'(x)$.

(2)设$f(x)=(\arctan x)^{\tan x}$, 求$f'(x)$.

(3)设$\begin{cases} x=t+\ln(1+t) \\ y=\sin t \end{cases}$, 求$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, $\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}$.

(4)设$y=\frac{x^2}{x-1}$, 求$y'$, $y''$, $y^{(n)}$.

(5)设$f'(0)$存在，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)-f(0)}{1-\cos x}$

**3．(本题10分)** 证明两曲线$\boldsymbol{xy - e^{x+y} + 1 = 0}$与$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x^3 + y^3}) - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$在$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$点相切。

**4．(本题10分)** 设$\boldsymbol{x_{n+1}} = \mathbf{sin}\, \boldsymbol{x_n}$, $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, 证明$\{\boldsymbol{x_n}\}$收敛，并求出其极限.

**5．(本题10分)** 设$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-2x+1}}{x+2}}$, 求$\boldsymbol{f(x)}$的渐近线.

**6．(本题10分)** 问函数$\boldsymbol{x^2\sin\frac{1}{x}}$及函数$\boldsymbol{x^3\sin\frac{1}{x}}$, 在$\boldsymbol{(0,+\infty)}$上是否分别一致连续？说明理由.

**7．(本题10分)** 设$\boldsymbol{f(x)}$是$[\mathbf{0,1}]$上的连续函数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)=0$$

证明存在$\boldsymbol{\xi}\in[\mathbf{0,1}]$使得$\boldsymbol{f(\xi)=0}$.

参考答案:

1/(1)$\mathbf{3}$;(2)$-\mathbf{4}$;(3)$\mathbf{1}$;(4)$-\mathbf{2}$;(5)$0 < \frac{1}{2^n} + \frac{2}{1+2^{n+1}} + \frac{2^2}{2+2^{n+2}} + \cdots + \frac{2^n}{n+2^{n+n}} < (n+1) \times \frac{1}{2^n} \to 0$, 所以，原式$= 0$.

2/(1)$\frac{e^{\arcsin\sqrt{x}}}{2\sqrt{(x(1-x))}}$; (2)$(\arctan x)^{\tan x}(\sec^2 x \ln \arctan x + \frac{\tan x}{\arctan x(1+x^2)})$; (3)$\frac{(1+t)\cos x}{2+t}$, $\frac{(1+t)\big(\cos x-(1+t)(2+t)\sin x\big)}{(2+t)^3}$; (4)$y = x+1+\frac{1}{x-1}$, $y' = 1-\frac{1}{(x-1)^2}$, $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$, $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ $(n \geq 2)$; (5)原式$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)-f(0)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 2f'(0)$.

3.解：第一个曲线方程两边关于$x$求导得：

$$y + xy' - e^{x+y}(1+y') = 0$$

将$x = 0$, $y(0) = 0$代入得: $y'(0) = -1$. 同理，第二个曲线方程两边关于$x$求导得：

$$\cos(x^3+y^3)(3x^2+3y^2) - 1 - y' = 0$$

将$x = 0$, $y(0) = 0$代入得: $y'(0) = -1$.

所以两曲线在$(0,0)$处相切。

4.证：不妨设$x_2 = \sin x_1 > 0$, 则$n \geq 2$时：$x_n \in (0,1)$, 且$x_{n+1} = \sin x_n \leq x_n$. 所以$\{x_n\}$收敛，记极限为$A$, 则: $A = \sin A$, 所以$A = 0$.

5.解：$a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^4-2x+1}}{x+2} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\sqrt{x^4-2x+1}}{x+2} - x)$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x+1-x^2(x+2)^2}{(x+2)(\sqrt{x^4-2x+1}+x(x+2))} = -2$. 所以斜渐近线为:$y = x-2$. 另外，还有一条垂直渐近线:$x = -2$.

6.解：(1)证法一：对任意$y > x > 0$:

$$\begin{aligned}
&|x^2\sin\frac{1}{x} - y^2\sin\frac{1}{y}| \leq x^2|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}| + |y^2-x^2||\sin\frac{1}{y}| \\
\leq& x^2|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}| + |y^2-x^2||\frac{1}{y}| = \frac{x}{y}|y-x| + (1+\frac{x}{y})|y-x| \\
\leq& 3|y-x|
\end{aligned}$$

所以$x^2\sin\dfrac{1}{x}$是$(0,+\infty)$上的Lip函数，必一致连续.

证法二：$f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$, $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, $|f'(x)|\le 3$, 所以$x^2\sin\dfrac{1}{x}$是$(0,+\infty)$上的Lip函数，必一致连续.

(2) 取$x_n=n+\dfrac{1}{n}$, $y_n=\dfrac{1}{n}$, 则$x_n-y_n\to 0$:

$$\begin{aligned}
&(n+\frac{1}{n})^3\sin\frac{n}{n^2+1}-n^3\sin\frac{1}{n}\\
=&\Big((n+\frac{1}{n})^3-n^3\Big)\sin\frac{n}{n^2+1}+n^3\Big(\sin\frac{n}{n^2+1}-\sin\frac{1}{n}\Big)\\
=&(3n+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3})\sin\frac{n}{n^2+1}+2n^3\sin\frac{-1}{2(n^2+1)n}\cos\frac{2n^2+1}{2(n^2+1)n}\\
&\to 3+1=4\neq 0
\end{aligned}$$

所以$x^3\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上是非一致连续的.

7.证法一：用反证法，假如$f(x)\neq 0$, 不妨设$f(x)>0$, 记其最小值为$m>0$，则

$$\frac{1}{n+1}\big(f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\big)\ge m$$

令$n\to\infty$得：$0\ge m$，矛盾.

证法二：记$f(x)$的最小、大值为$m$、$M$, 则

$$m\le\frac{1}{n+1}\big(f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\big)\le M$$

所以存在$\xi_n\in[0,1]$, 使得: $f(\xi_n)=\dfrac{1}{n+1}\big(f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\big)$, 存在收敛子列$\xi_{n_k}\to\xi\in[0,1]$，所以$f(\xi_{n_k})\to f(\xi)$, 所以$f(\xi)=0$.