复旦大学管理学院

2015～2016学年第一学期期末考试试卷

A卷(共6页)

课程名称：数学分析BI　　课程代码：MATH 20016.06

开课院系：管理学院　　考试形式：闭卷

姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

1. (本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2^n+3^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^3-x^2+\dfrac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$.

2. (本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列积分

(1)$\displaystyle\int (1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}\,x$.

(2)$\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x$.

(3)$\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}\,x$.

(4)$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\big(x^2+\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\big)\,\mathrm{d}\,x$.

3. (本题10分) 求平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$绕直线$y=1$旋转一周所得旋转体的体积.

4. (本题10分) 设$\boldsymbol{n}$为正整数，记$\boldsymbol{a_n}$为方程$\sin \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}$的解的个数，求极限$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\boldsymbol{a_n}}{\boldsymbol{n}}$.

5. (本题10分) 设$\boldsymbol{f(x)}$在$[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$上有连续的导函数, 在$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$上有二阶导函数, 且$\boldsymbol{f(0) = f(1) = 0}$, $\boldsymbol{f'(0) > 0}$, $\boldsymbol{f'(1) > 0}$.

(1)证明$\exists \boldsymbol{\xi} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$使得$\boldsymbol{f(\xi) = 0}$; (2)证明$\exists \boldsymbol{\eta} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$使得$\boldsymbol{f''(\eta) + f'(\eta) = 0}$.

6. (本题10分) 讨论函数$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7. (本题10分) 设有一段抛物线$\boldsymbol{L}$： $\boldsymbol{y = 1 - x^2}$, $\boldsymbol{x \in (0,1)}$. $\boldsymbol{P_0(x_0, y_0)}$为$\boldsymbol{L}$上的一点。(1) 求$\boldsymbol{L}$在$\boldsymbol{P_0}$点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积$\boldsymbol{S}$; (2)当$\boldsymbol{P_0}$位于$\boldsymbol{L}$的哪一点时，上述三角形的面积$\boldsymbol{S}$达到最小值？

8. (本题10分) 设函数$\boldsymbol{f(x)}$在$(-\infty,+\infty)$上对任意的正整数$\boldsymbol{n}$满足：

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sin kx\right|\leq\frac{1}{n}$$

证明：

(1)$\boldsymbol{f(x)}$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续；

(2)$\boldsymbol{f(\sqrt[3]{x^2})}$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

复旦大学管理学院

2015～2016学年第一学期期末考试试卷

B卷(共6页)

课程名称：数学分析BI 课程代码：MATH 20016.06

开课院系：管理学院 考试形式：闭卷

姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

1. (本题共4小题，每小题5分，共20分)计算下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(3^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n}}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2}+x^2-\sqrt{1+x^2}\right)$.

2. (本题共4小题，每小题5分，共20分) 计算下列积分

(1) $\int (1+x)(1-\sqrt{x})\, \mathrm{d}\, x.$

(2) $\int \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}\, x.$

(3) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}\, \mathrm{d}\, x.$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} x\big(x^3 + \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\big)\, \mathrm{d}\, x.$

3. (本题10分) 求平面区域$D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2\}$绕直线$y = 1$旋转一周所得旋转体的体积.

4. (本题10分) 设$\boldsymbol{k}$为常数，试讨论方程$\dfrac{\ln x}{x} = k$在$x \in (0, +\infty)$上解的个数.

5. (本题10分) 设$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导函数, 在$(0,1)$上有二阶导函数, 且$f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$.

(1)证明$\exists \xi \in (0,1)$使得$f'(\xi) = 0$; (2)证明$\exists \eta \in (0,1)$使得$f''(\eta) - f(\eta) = 0$.

6. (本题10分) 讨论函数$\boldsymbol{y=\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}$的单调性，凸性，求出它的极值点，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7. (本题10分) 设有一段抛物线$\boldsymbol{L}$： $\boldsymbol{y = 1 - x^2}$, $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{-1, 1}]$. $\boldsymbol{P_0(x_0, y_0)}$为$\boldsymbol{L}$上的一点。(1) 求$\boldsymbol{L}$与$\boldsymbol{x}$轴所围有界区域$\boldsymbol{D}$的面积; (2)当$\boldsymbol{P_0}$位于$\boldsymbol{L}$的哪一点时，$\boldsymbol{L}$在$\boldsymbol{P_0}$点的法线通过原点？分别计算此法线将$\boldsymbol{D}$分割成两小块区域的面积。

8. (本题10分) 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且存在常数$a,b,c\in\mathbb{R}$, 使得:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b\sqrt{x}+c)\big)=0$$

证明:

(1)$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续;

(2)$f(\sqrt{x})$在$[0,+\infty)$上一致连续.

A卷答案

1. (1)$\frac{1}{2}$; (2)3; (3)1; (4)$\frac{1}{6}$.

2. (1)$x+\ln x+2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$; (2)$-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{x^2})+C$; (3)$\frac{4}{3}$; (4)$\frac{\pi^4}{2}$.

3. $2\pi^2$.

4. 记$k=[\frac{n}{2\pi}]$, 则$2k-1\le\frac{a_n+1}{2}\le 2k+2$, 因而：$4\frac{k}{n}-\frac{3}{n}\le\frac{a_n}{n}\le 4\frac{k}{n}+\frac{3}{n}$. $\frac{k}{n}=\frac{1}{n}[\frac{n}{2\pi}]\to\frac{1}{2\pi}$, 所以：$\frac{a_n}{n}\to\frac{2}{\pi}$.

5.(1)分别记$f(x)$的最大值及最小值为M, m, 由题设条件可知:$M>0$, $m<0$. 所以存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=0$, 因而存在$\xi_1\in(0,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,1)$使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

(2)记$g(x)=f'(x)e^x$, $g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$, 所以存在$\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$使$g'(\eta)=0$, 即$f''(\eta)+f'(\eta)=0$.

6.略

7.切线方程为：$y-(1-x_0^2)=-2x_0(x-x_0)$, $S(x_0)=\frac{1}{2x_0}+x_0+\frac{x_0^3}{2}$.

由$S'(x)=-\frac{1}{2x^2}+1+\frac{3x^2}{2}=0$解得$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$S''(x)=\frac{1}{x^3}+3x>0$, 所以$S(\frac{\sqrt{3}}{3})$是所求的最小值。

8. (1)$\forall\epsilon>0$, 取$n=[\frac{1}{3\epsilon}]+1$, 则$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sin kx\right|\le\frac{1}{n}<\frac{\epsilon}{3}$. 记$g(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sin kx$为$(-\infty,+\infty)$上连续的周期函数，所以$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，存在$\delta>0$, 当$|x_2-x_1|<\delta$时：$|g(x_2)-g(x_1)|<\frac{\epsilon}{3}$. 此时：$|f(x_2)-f(x_1)|\le|f(x_2)-g(x_2)|+|f(x_1)-g(x_1)|+|g(x_2)-g(x_1)|<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$. 所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

(2)$y=x^{\frac{2}{3}}$和$f(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，所以$f(x^{\frac{2}{3}})$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

B卷答案

1. (1)$\frac{1}{2}$; (2)$\ln\frac{3}{2}$; (3)0; (4)$+\infty$.

2. (1)$x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$; (2)$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; (3)$1$; (4)$\frac{2\pi^5}{5}$.

3. $\frac{4\pi}{5}$.

4. $y=\ln x$与$y=kx$相切的条件为：$\ln x=kx$且$\frac{1}{x}=k\Rightarrow x=e, k=\frac{1}{e}$. 所以：(1)$k>\frac{1}{e}$时无交点；(2)$k=\frac{1}{e}$或$k\le 0$时一个交点；(3)$0<k<\frac{1}{e}$时两个交点.

5.(1)分别记$f(x)$的最大值及最小值为M, m, 由题设条件可知:$M>0$, $m<0$. 所以存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=0$, 因而存在$\xi_1\in(0,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,1)$使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

(2)记$g(x)=f(x)e^{-x}$, $g(0)=g(x_0)=g(1)=0$, 所以存在$\eta_1\in(0,x_0)$, $\eta_2\in(x_0,1)$使$g'(\eta_1)=g'(\eta_2)=0$, 即$f'(\eta_1)-f(\eta_1)=f'(\eta_2)-f(\eta_2)=0$.

再记$h(x)=(f'(x)-f(x))e^x$, $h(\eta_1)=h(\eta_2)=0$, 所以存在$\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$使$h'(\eta)=0$, 即$f''(\eta)-f(\eta)=0$.

6.略

7.(1)$\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}$.

(2)$\frac{y_0}{x_0}\cdot(-2x_0)=-1\Rightarrow y_0=\frac{1}{2}$, $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}(1-x^2)dx=\frac{2}{3}-\frac{7\sqrt{2}}{24}$, $S_2=\frac{2}{3}-\frac{7\sqrt{2}}{24}$.

8. (1)$\forall\epsilon>0$, 存在$X>0$, 当$|x|>X$时：$|f(x)-(ax+b\sqrt{x}+c)|<\frac{\epsilon}{3}$, 而$g(x)=ax+b\sqrt{x}+c$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，存在$\delta_1>0$, 当$|x_2-x_1|<\delta_1$时：

$|g(x_2)-g(x_1)|<\dfrac{\epsilon}{3}$. 所以当$|x_1|,|x_2|>X$且$|x_2-x_1|<\delta_1$时：$|f(x_2)-f(x_1)|\le |f(x_2)-g(x_2)|+|f(x_1)-g(x_1)|+|g(x_2)-g(x_1)|<\dfrac{\epsilon}{3}+\dfrac{\epsilon}{3}+\dfrac{\epsilon}{3}=\epsilon$.

又$f(x)$在$[-X-1,X+1]$上连续，所以一致连续，存在$\delta_2>0$, 当$|x_1|,|x_2|\le X+1$且$|x_2-x_1|<\delta_2$时：$|f(x_2)-f(x_1)|\le\epsilon$.

取$\delta=min\{\delta_1,\delta_2,1\}$，则当$|x_2-x_1|<\delta$时：$|f(x_2)-f(x_1)|\le\epsilon$. 所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

(2)$y=\sqrt{x}$和$f(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，所以$f(\sqrt{x})$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.