复旦大学管理学院

2015～2016学年第一学期期中考试试卷(共5页)

课程名称：数学分析BI　课程代码：MATH 20016.06

开课院系：管理学院　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

1.　(本题共4小题，每小题5分，共20分)

(1)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+1}{n^3+n^2+5n}$.

(2)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-ax^{-1})^{cx}$, 其中常数$ac\neq 0$.

(3)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-e^{3x}}{\ln(1+\sin x)}$.

(4)设$a>0$, $b>0$, 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2.（本题共4小题，每小题5分，共20分）

(1)设$\boldsymbol{f(x)=\ln(\ln(\ln x))}$, 求$\boldsymbol{f'(x)}$.

(2)设$\boldsymbol{f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}}$, 求$\boldsymbol{f'(x)}$.

(3)设$\boldsymbol{xy=e^{x+y}}$, 求$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}}$.

(4)求函数$\boldsymbol{y=x\ln x}$的$\boldsymbol{n}$阶导数的一般表达式.

3.（本题10分） 设$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=c}$, 证明$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=c}$.

4. （本题10分） 设$\boldsymbol{x_1 > 0}$, $\boldsymbol{n \geq 1}$时$\boldsymbol{x_{n+1} = \dfrac{1+2x_n}{1+x_n}}$, 证明$\boldsymbol{\{x_n\}}$收敛，并求出它的极限.

5.（本题10分） 设$f(x)=\begin{cases}\sin x+x^2, & x<0\\ \ln(ax+b), & x\geq 0\end{cases}$, 问常数$a,b$取何值时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导？

6.（本题10分） 设$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$, (1)分别求出当$x\to-\infty$及$x\to+\infty$时$f(x)$的两条斜渐近线；(2)证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

7. (本题10分) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上非负且单调增加函数，(1)证明$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$必存在；(2)问$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$是否存在？

8. (本题10分) 设非负函数$f(x)$在$x=2$处可导，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\right)^n=2$, 求$f(2)$和$f'(2)$.

答案：

1/(1)$\boldsymbol{3}$, (2)$\boldsymbol{e^{-ac}}$, (3)$\boldsymbol{-2}$, (4)$\boldsymbol{a^{\frac{a}{a+b}}b^{\frac{b}{a+b}}}$.

2/(1)$\dfrac{1}{(\ln(\ln x))(\ln x)x}$, (2)$\dfrac{1}{1+x^2}$, (3)$\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$, (4)$y'(x)=1+\ln x$, $y^{(n+2)}=\dfrac{(-1)^n n!}{n^{n+1}}$, $n=0,1,2,\ldots$.

3.证明：$\forall\varepsilon>0$, 要找$\delta>0$, 使$0<|x-a|<\delta$时：

$$|f(g(x))-c|<\varepsilon$$

因为$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=c$, 且$\varepsilon>0$, 所以存在$X>0$, 当$|u|>X$时：$|f(u)-c|<\varepsilon$;

又因为$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, 且$X>0$, 所以存在$\delta>0$, 当$0<|x-a|<\delta$时：$|g(x)|>X$.

因而，当$0<|x-a|<\delta$时：$|f(g(x))-c|<\varepsilon$.

4.证明：(1)先求解不动点方程：$\dfrac{1+2x}{1+x}=x$, 解得两个不动点：$x_1^*=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2^*=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2)显然$x_n>0$, $n>0$时(这说明第一个不动点$x_1^*(<0)$可以不用考虑了).

$$x_{n+1}-x_2^*=\frac{1+2x_n}{1+x_n}-\frac{1+2x_2^*}{1+x_2^*}=\frac{x_n-x_2^*}{(1+x_n)(1+x_2^*)}$$

因为$(1+x_n)(1+x_2^*)>0$, 所以$x_{n+1}-x_2^*$与$x_n-x_2^*$同号，因而有以下结论：
(2.1)$x_1=x_2^*$时：$x_n\equiv x_2^*$;
(2.2)$0<x_1<x_2^*$时：$0<x_n<x_2^*$;
(2.3)$x_2^*<x_1$时：$x_2^*<x_n$.

(3)

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1+2x_n}{1+x_n}-\frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

因为$(1+x_n)(1+x_{n-1})>0$, 所以$x_{n+1}-x_{n-1}$与x_n-x_{n-1}同号，因而有以下结论：
(3.1)$0<x_1<x_2^*$时：通过计算可知$x_2-x_1>0$, 所以$x_{n+1}-x_n>0$;
(3.2)$x_2^*<x_1$时：通过计算可知$x_2-x_1<0$, 所以$x_{n+1}-x_n<0$.

或者(3)可换成下面另外的证法(3)':

(3)'

$$\boldsymbol{x_{n+1} - x_n = \frac{1 + 2x_n}{1 + x_n} - x_n = \frac{1 + x_n - x_n^2}{1 + x_n}}$$

因而有以下结论:

(3.1)$\boldsymbol{0 < x_n < x_2^*}$时:$\boldsymbol{x_{n+1} - x_n > 0}$;

(3.2)$\boldsymbol{x_2^* < x_n}$时:$\boldsymbol{x_{n+1} - x_n < 0}$.

结合(2)和(3)或(2)和(3)'可知:

(i)$\boldsymbol{x_1 = x_2^*}$时:$\boldsymbol{x_n \equiv x_2^*}$;

(ii)$\boldsymbol{0 < x_1 < x_2^*}$时:$\boldsymbol{0 < x_n < x_2^*}$且$\boldsymbol{x_n}$单调上升;

(iii)$\boldsymbol{x_2^* < x_1}$时:$\boldsymbol{x_2^* < x_n}$且$\boldsymbol{x_n}$单调下降.

所以$\boldsymbol{x_n}$单调有界必收敛,且$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_2^* = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

5.解:显然在$\boldsymbol{x \neq 0}$时,$\boldsymbol{f(x)}$都是可导的。

$\boldsymbol{f(0-0) = 0}$, $\boldsymbol{f(0+0) = \ln b = f(0)}$, 为保证$\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{x = 0}$点连续,必须有$\boldsymbol{\ln b = 0}$, $\boldsymbol{b = 1}$.

在$\boldsymbol{f(x)}$已经在$\boldsymbol{x = 0}$处连续的条件下有:

$\boldsymbol{f'_-(0) = (\cos x + 2x)\Big|_{x=0} = 1}$, $\boldsymbol{f'_+(0) = \dfrac{a}{ax+b}\Big|_{x=0} = \dfrac{a}{b} = a}$,

为保证$\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{x = 0}$点可导,必须有$\boldsymbol{a = 1}$.

6.(1)解: 先求$\boldsymbol{x \to -\infty}$时的渐近线:

$\boldsymbol{a_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = -1}$;

$\boldsymbol{b_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - a_1 x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - |x|) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+|x|} = -1}$.

所以$\boldsymbol{x \to -\infty}$时的渐近线为:$\boldsymbol{y = a_1 x + b_1 = -x - 1}$.

再求$\boldsymbol{x \to +\infty}$时的渐近线:

$\boldsymbol{a_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = 1}$;

$\boldsymbol{b_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - a_2 x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = 1}$.

所以$x\to+\infty$时的渐近线为：$y=a_2x+b_2=x+1$.

(2)证明：$f(x')-f(x'')=\sqrt{x'^2+x'+1}-\sqrt{x''^2+x''+1}=\dfrac{x'-x''}{\sqrt{x'^2+x'+1}+\sqrt{x''^2+x''+1}}$,
所以：$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{1}{2}|x'-x''|$, 因而$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

7(1)我们给出两种证法:

证法一：因为$f(x)\ge 0$, 所以$f(x)$有下确界，记下确界为$\alpha=\inf\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}f(x)$.

下面证明$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\alpha$:
$\forall\varepsilon>0$要找$X>0$使得当$x<-X$时，成立：

$$|f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

因为$\alpha+\varepsilon>\alpha$, 所以$\alpha+\varepsilon$不是$f(x)$的下界，从而存在$x_1$, 使得$f(x_1)<\alpha+\varepsilon$,
取$X=\max\{|x_1|,1\}>0$, 则当$x<-X$时，必有$x<x_1$, 所以：

$$\alpha\le f(x)\le f(x_1)<\alpha+\varepsilon\ \Rightarrow\ |f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

证法二：因为当$x\to-\infty$时，$f(x)$单调减少且有下界$f(x)\ge 0$, 所以$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在。

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不一定存在(因为$x\to+\infty$时，$f(x)$单调增加但是不一定有上界),
例如函数$f(x)=e^x$是非负单调上升函数，但是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

8. 解：先证明$f(2)=1$, 我们给出三种证法:
证法一：反证法，不然，要么$f(2)<1$要么$f(2)>1$, 记$r=\dfrac{f(2)+1}{2}$:
若$f(2)<1$, 则$f(2)<\dfrac{f(2)+1}{2}=r$, 且$r<1$,
根据极限的分离性，存在$\delta>0$, 当$0<|x-2|<\delta$时：$f(x)<r$
当$n>\dfrac{1}{\delta}$时：$0<f^n(2+\frac{1}{n})<r^n$, 但$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$, 由极限的夹逼性：
$\lim\limits_{n\to\infty}f^n(2+\dfrac{1}{n})=0$, 此与题设条件矛盾；

若$f(2)>1$, 则$f(2)>\dfrac{f(2)+1}{2}=r$, 且$r>1$,
根据极限的分离性，存在$\delta>0$, 当$0<|x-2|<\delta$时：$f(x)>r$
当$n>\dfrac{1}{\delta}$时：$f^n(2+\frac{1}{n})>r^n$, 但$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=+\infty$, 由极限的夹逼性：

$\lim\limits_{n\to\infty} f^n(2+\frac{1}{n}) = +\infty$, 此仍与题设条件矛盾；

所以$f(2) = 1$.

证法二：

$$f(2) = \lim_{n\to\infty} f(2+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \big(f^n(2+\frac{1}{n})\big)^{\frac{1}{n}} = 1$$

证法三：根据极限的分离性，存在$N > 0$, 当$n > N$时: $1 < f^n(2+\frac{1}{n}) < 3$, 所以

$$1 < f(2+\frac{1}{n}) = \big(f^n(2+\frac{1}{n})\big)^{\frac{1}{n}} < 3^{\frac{1}{n}}$$

令$n \to \infty$, 由极限的夹逼性得：

$$f(2) = \lim_{n\to\infty} f(2+\frac{1}{n}) = 1$$

其次，证明$f'(2) = \ln 2$:

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty} n \ln f(2+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} n(f(2+\frac{1}{n}) - 1) = f'(2)$$