

# 复旦大学计算机科学技术学院

2020-2021 第一学期 《概率论与数理统计》期末考试试卷

A 卷

参考答案

课程编号: COMP130006.04 考试形式: 闭卷 考试日期: 2021.1.12

姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 专业\_\_\_\_\_

提示: 请同学们秉持诚实守信宗旨, 谨守考试纪律, 摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为, 学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
分值	10	10	10	10	20	20	20	100
得分								

# 1 基础知识

## 1.1 习题, 1.2.20

将3个球随机地放入4个杯子中, 试求杯子中球的最大个数  $X$  的概率分布。

解: 只有三种情况,

$$X = \begin{cases} 1 & \text{三个球分别放在三个杯子中} \\ 2 & \text{一个球和另外两个球分别放在两个杯子中} \\ 3 & \text{三个球放在同一个杯子中} \end{cases}$$

由于每个球都是机会均等地放入到4个杯子中, 用  $a_1, a_2, a_3$  分别表示三次放球,

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(a_1 \text{任意放}) \cdot P(a_2 \text{放入三个空杯}) \cdot P(a_3 \text{放入两个空杯}) \\ &= 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(a_1 \text{任意放}) \cdot P(a_2 \text{放入有球杯}) \cdot P(a_3 \text{放入有球杯}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= 1 - P(X = 1) - P(X = 3) \\ &= 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(a_1 \text{任意放}) \cdot (P(a_2 \text{放入有球杯}) \cdot P(a_3 \text{放入空杯}) + P(a_2 \text{放入空杯}) \cdot P(a_3 \text{放入有球杯})) \\ &= 1 \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \right) \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

## 2 随机变量

### 2.1 书本, 标准正态分布

服从标准正态分布的随机变量称为标准正态变量, 记为  $U$ , 标准正态分布的概率密度函数  $\phi(u)$  和分布函数  $\Phi(u)$  分别为,

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad -\infty < u < \infty$$
$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < u < \infty$$

证明:

$$P(|U| < c) = 2\Phi(c) - 1$$

解:

$$\begin{aligned} P(|U| < c) &= P(-c < U < c) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-c}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt - 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 2\Phi(c) - 1 \end{aligned}$$

### 3 多维随机变量

#### 3.1 习题, 3.2.4

设平面区域  $D$  由曲线  $y = \frac{1}{x}$  及直线  $y = 0, x = 1, x = 4$  所围成, 二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $D$  上服从均匀分布, 试求

1.  $X$  的边际密度函数
2.  $X$  的边际分布函数
3.  $X$  的期望
4.  $Y$  的边际密度函数
5.  $Y$  的边际分布函数
6.  $Y$  的期望

解: 先计算区域  $D$  的面积,

$$S_D = \int_1^4 \int_0^{\frac{1}{x}} y dy dx = \int_1^4 \ln x dx = \ln 4$$

因此,  $(X, Y)$  的联合密度函数是

$$p(x, y) = \frac{1}{\ln 4} = a, \quad 1 < x < 4, 0 < y < \frac{1}{x}$$

1.

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{x}} a dy = \frac{a}{x}, \quad 1 < x < 4$$

2.

$$P(x) = \int_{-\infty}^x \frac{a}{t} dt = \int_1^x \frac{a}{t} dt = a \cdot (\ln x - \ln 1) = a \ln x, \quad 1 < x < 4$$

3.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_1^4 x \cdot \frac{a}{x} dx = 3a$$

4.

$$\begin{aligned} p(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \\ &= \begin{cases} \int_1^4 p(x, y) dx = 3a & 0 < y < \frac{1}{4} \\ \int_1^{\frac{1}{y}} p(x, y) dx = a \left( \frac{1}{y} - 1 \right) & \frac{1}{4} < y < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 P(y) &= \int_{-\infty}^y p_y(t) dy \\
 &= \begin{cases} \int_0^y 3adt = 3ay & 0 < y < \frac{1}{4} \\ \int_0^{\frac{1}{4}} 3adt + \int_{\frac{1}{4}}^y a\left(\frac{1}{t} - 1\right) dt = \frac{3}{4}a + a\left(\ln y - \ln \frac{1}{4}\right) - a\left(y - \frac{1}{4}\right) = a + 1 + a \ln y - ay & \frac{1}{4} < y < 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} yp(y) dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{4}} 3ay dy + \int_{\frac{1}{4}}^1 a\left(\frac{1}{y} - 1\right) y dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{4}} 3ay dy + \int_{\frac{1}{4}}^1 ady - \int_{\frac{1}{4}}^1 ay dy \\
 &= 3a \cdot \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^{\frac{1}{4}} + a\left(1 - \frac{1}{4}\right) - a \cdot \frac{1}{2}y^2 \Big|_{\frac{1}{4}}^1 \\
 &= \frac{3}{8}a \\
 &= \frac{3}{8 \ln 4} \\
 &= \frac{3}{16 \ln 2}
 \end{aligned}$$

## 4 极限性质

### 4.1 习题, 4.4.2

某计算机主机的各个终端的使用相互独立, 解答下面的问题,

1. 设有 100 个终端, 每个终端有 80% 的时间被使用, 计算至少 15 个终端空闲的概率。
  - (a) 采用二项分布计算
  - (b) 采用正态近似计算
2. 设有 100 个终端, 要保证至少 15 个终端空闲的概率不小于 95%, 每个终端空闲的时间比例不能小于多少?
3. 设每个终端有 80% 的时间被使用, 要保证至少 15 个终端空闲的概率不小于 95%, 至少需要多少个终端?
4. 谈谈为什么二项分布要采用正态近似?
5. 二项分布近似于正态分布的条件是什么?
6. 采用正态近似计算时, 区间修正的原理是什么?

解:

1. 由此知道每个终端空闲的概率为  $p = 0.2$ ,

(a) 采用二项式分布, 空闲终端数  $X \sim b(100, 0.2)$ , 因此

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= P(X = 15) + P(X = 16) + \cdots + P(X = 100) \\ &= \sum_{i=15}^{100} 00P(X = i) \\ &= \sum_{i=15}^{100} \binom{100}{i} 0.2^i 0.8^{100-i} \end{aligned}$$

(b) 采用正态分布近似,  $X \sim N(100 * 0.2, 100 * 0.2 * 0.8) = N(20, 16)$ , 即

$$\frac{X - 20}{\sqrt{16}} \sim N(0, 1)$$

因此

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 1 - P(X \leq 14) \\ &\approx 1 - P(X < 14.5) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 20}{\sqrt{16}} < \frac{14.5 - 20}{\sqrt{16}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-5.5}{4}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.5}{4}\right) \end{aligned}$$

2. 设单个终端的空闲概率为  $p$ , 则利用正态近似, 要满足

$$P(X \geq 15) \geq 0.95$$

由于

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 1 - P(X \leq 14) \\ &\approx 1 - P\left(\frac{X - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} < \frac{14.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{14.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} 1 - \Phi\left(\frac{14.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) &\geq 0.95 \\ \Phi\left(\frac{14.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) &\leq 0.05 \\ \frac{14.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} &\leq u_{0.05} \end{aligned}$$

解此不等式, 得到  $p$  的最小值。

3. 设终端数为  $n$ , 则利用正态近似,

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 1 - P(X \leq 14) \\ &\approx 1 - P\left(\frac{X - 0.2n}{\sqrt{0.16n}} < \frac{14.5 - 0.2n}{\sqrt{0.16n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{14.5 - 0.2n}{\sqrt{0.16n}}\right) \geq 0.95 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{14.5 - 0.2n}{\sqrt{0.16n}}\right) &\leq 0.05 \\ \frac{14.5 - 0.2n}{\sqrt{0.16n}} &\leq u_{0.05} \end{aligned}$$

解此不等式, 得到  $n$  的最小值。

4. 略

5. 略

6. 略

## 5 统计量

### 5.1 定理 5.4.1 证明

证明来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  容量为  $n$  的样本，其样本均值服从  $N(\mu, \sigma^2/n)$ 。

解：根据连续场合的卷积公式和正态分布的性质，正态分布满足可加性，由于  $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，因此  $\sum_{i=1}^n x_i$  和  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  都服从正态分布。而且

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n E(x_i) \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\bar{x}) &= Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n Var(x_i) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

因此，样本均值

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

## 5.2 习题, 5.4.2

由正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  抽取两个独立样本, 容量分别是  $m, n$ , 试求两个样本均值相差不超过  $\epsilon$  的概率。

解: 两个样本均值分别表示为  $\bar{x}_m$  和  $\bar{x}_n$ , 易知

$$\bar{x}_m \sim N(\mu, \sigma^2/m), \quad \bar{x}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

则它们的差

$$y = \bar{x}_m - \bar{x}_n \sim N(0, \sigma^2/m + \sigma^2/n)$$

即

$$\frac{y}{\sqrt{\sigma^2/m + \sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

因此,

$$\begin{aligned} P(|y| < \epsilon) &= P\left(\left|\frac{y}{\sqrt{\sigma^2/m + \sigma^2/n}}\right| < \frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma^2/m + \sigma^2/n}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma^2/m + \sigma^2/n}}\right) - 1 \end{aligned}$$

## 6 参数估计

### 6.1 习题, 6.1.7

设从均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$  的总体中, 分别抽取容量为  $n_1$  和  $n_2$  的两独立样本,  $\bar{x}_1$  和  $\bar{x}_2$  分别是这两个样本的均值。

1. 证明, 对于任意的常数  $a, b$ , 满足  $a + b = 1$ ,  $Y = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2$  都是  $\mu$  的无偏估计。
2. 确定常数  $a, b$ , 使  $Var(Y)$  达到最小。

解:

1.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2) \\ &= aE(\bar{x}_1) + bE(\bar{x}_2) \\ &= a\mu + b\mu \\ &= (a + b)\mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Var(Y) &= Var(a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2) \\ &= a^2Var(\bar{x}_1) + b^2Var(\bar{x}_2) \\ &= \frac{a^2}{n_1}\sigma^2 + \frac{b^2}{n_2}\sigma^2 \\ &= \left(\frac{a^2}{n_1} + \frac{b^2}{n_2}\right)\sigma^2 \end{aligned}$$

现在要在  $a + b = 1$  的条件下, 求上式的最小值。即求

$$s = \frac{a^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2}{n_2}$$

的最小值。对  $a$  求导数并令其为 0,

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{2a}{n_1} - \frac{2(1-a)}{n_2} = 0$$

解得,

$$\begin{aligned} a &= \frac{n_1}{n_1 + n_2} \\ b &= \frac{n_2}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

## 6.2 区间估计

正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  已知,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为样本, 根据枢轴量法, 分别推导  $\mu$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的

1. 同等置信区间
2. 同等单侧置信下限
3. 同等单侧置信上限

解: 设枢轴量为

$$y = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

1. 根据同等置信区间的定义, 即是要确定一对  $c < d$ , 使得

$$P(c \leq y \leq d) = 1 - \alpha$$

由于  $u$  服从标准正态分布, 要想区间  $(c, d)$  最短, 则要满足  $c = -d$ , 因此上式变成

$$P(-d \leq y \leq d) = 1 - \alpha$$

现在需要求出  $d$ 。因为

$$P(-d \leq y \leq d) = P(|y| \leq d) = 2\Phi(d) - 1$$

所以

$$\begin{aligned} 2\Phi(d) - 1 &= 1 - \alpha \\ \Phi(d) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ d &= u_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

带入得到,

$$-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

不等式变换得到,

$$\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma$$

即同等置信区间为

$$\left[ \bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma, \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma \right]$$

2. 根据同等单侧置信下限的定义, 即要确定  $d$ , 使得

$$P(y \leq d) = 1 - \alpha$$

因为

$$P(y \leq d) = \Phi(d)$$

所以

$$\begin{aligned}\Phi(d) &= 1 - \alpha \\ d &= u_{1-\alpha}\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}y &\leq u_{1-\alpha} \\ \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} &\leq u_{1-\alpha} \\ \mu &\geq \bar{x} - u_{1-\alpha}\sigma\end{aligned}$$

3. 类似地, 要确定一个  $c$ , 使得

$$P(y \geq c) = 1 - \alpha$$

因为

$$P(y \geq c) = 1 - P(y < c) = 1 - \Phi(c)$$

因此

$$\begin{aligned}1 - \Phi(c) &= 1 - \alpha \\ \Phi(c) &= \alpha \\ c &= u_\alpha\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}y &\geq u_\alpha \\ \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} &\geq u_\alpha \\ \mu &\leq \bar{x} - u_\alpha\sigma\end{aligned}$$

## 7 假设检验

### 7.1 拒绝域推导

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是来自  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\sigma^2$  已知, 考虑如下关于  $\mu$  的检验问题:

$$H_0: \mu = c \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq c$$

其中  $c$  为一个常量。

1. 推导这个检验问题在显著性水平为  $\alpha$  的拒绝域。
2. 当  $\mu = c$  时, 这个检验犯第一类错误和第二类错误的概率分别是多少?

解:

1. 因为  $\sigma^2$  已知, 确定检验统计量为

$$y = \frac{\bar{x} - c}{\sigma/\sqrt{n}}$$

这是一个双侧检验问题, 因此拒绝域的形式应该是

$$|y| \geq k$$

已知显著性水平为  $\alpha$ , 则

$$\begin{aligned} P(|y| \geq k) &= \alpha \\ 1 - P(|y| < k) &= \alpha \\ 1 - (2\Phi(k) - 1) &= \alpha \\ \Phi(k) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ k &= u_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

因此得到的拒绝域为

$$W = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \left| \frac{\bar{x} - c}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

2. 第一类错误指的是, 此时  $\mu = c$ , 应该接受  $H_0$ , 但是获得的样本  $(x_1, \dots, x_n)$  落入了拒绝域, 导致  $H_0$  被拒绝, 即要计算在  $\mu = c$  条件下, 样本落入拒绝域的概率, 而这个概率正是上面的显著性水平  $\alpha$ , 所以犯第一类错误的概率为  $\alpha$ 。也可以计算如下,

$$\begin{aligned} P(W|\mu = c) &= P\left(\left| \frac{\bar{x} - c}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= 2 - 2\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &= 2 - 2(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

第二类错误指的是, 当  $\mu \neq c$  时, 样本没有落入拒绝域, 而此时  $\mu = c$ , 因此  $\mu \neq c$  的前提不存在, 因此不会犯第二类错误, 即犯第二类错误的概率为 0。

## 7.2 开放题，思维发散

关于区间估计和假设检验的关系，

1. 区间估计中的“置信水平”与假设检验中的“显著性水平”有关系吗？
2. 区间估计中的“单侧置信下限”、“单侧置信上限”与假设检验中的“单侧假设”有关系吗？
3. 区间估计中的“置信区间”与假设检验中的“双侧假设”有关系吗？
4. 区间估计问题能不能转化成假设检验问题？如果能，如何转化？
5. 假设检验问题能不能转化成区间估计问题？如果能，如何转化？

答：参见同济大学数学系编概率论与数理统计，中国工信出版集团，人民邮电出版社，2017/03，第八章拓展阅读